

NEW ALGEBRAIC CONCEPTS AND THEIR APPLICATIONS IN CODING THEORY

ANUJ KUMAR BHAGAT



**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI
MAY 2026**

© Indian Institute of Technology Delhi (IITD), New Delhi, 2026

New Algebraic Concepts and Their Applications in Coding Theory

by

Anuj Kumar Bhagat

Department of Mathematics

Submitted

*in fulfillment of the requirements of the degree of Doctor of Philosophy
to the*



**Indian Institute of Technology Delhi
May 2026**

Dedicated to
My Family

Certificate

This is to certify that the thesis entitled “**New Algebraic Concepts and Their Applications in Coding Theory**” submitted by **Mr. Anuj Kumar Bhagat** to the **Indian Institute of Technology Delhi**, for the award of the degree of **Doctor of Philosophy**, is a record of the original bona fide research work carried out by him under my guidance and supervision. The thesis has reached the standards fulfilling the requirements of the regulations relating to the degree.

The results contained in this thesis have not been submitted in part or full to any other university or institute for the award of any degree or diploma.

New Delhi

May 2026

Dr. Ritumoni Sarma

Professor

Department of Mathematics

Indian Institute of Technology Delhi

Acknowledgments

I express my sincere gratitude to my supervisor, Prof. Ritumoni Sarma, for his invaluable guidance in shaping the research problems and methodology of this thesis. His insightful feedback significantly strengthened my work and helped me develop as an independent researcher. I am deeply appreciative of his academic guidance, constant encouragement, and personal support throughout this journey. I also appreciate the freedom he granted me, as well as the opportunities to participate in national and international conferences and workshops, which greatly enriched my academic experience.

I sincerely thank the current and former members of my Student Research Committee—Prof. R. K. Sharma, Prof. Surjeet Kour, Prof. S. D. Joshi, Prof. Amit Priyadarshi, and Prof. Shaunak Sen—for their time and valuable guidance. I am also grateful to all the faculty members of the Department of Mathematics, IIT Delhi, for their continued support and cooperation.

I am thankful to Prof. Markus Grassl (International Centre for Theory of Quantum Technologies, University of Gdansk, Poland) for providing valuable insights that contributed to the proof of one of the results in this thesis.

I sincerely acknowledge the financial support provided by CSIR–HRDG in the form of fellowship and contingency grants. I am equally grateful to IIT Delhi for supporting my participation in international conferences through RSTA and RETA funding. I also acknowledge the National Centre for Mathematics (NCM) for providing financial support to attend the AIS on Advanced Topics in Finite Fields 2023, held at IMSc, Chennai, India.

I thank Harshdeep Singh and Dr. Vidya Sagar for their collaborative contributions to this work. I also acknowledge Dr. Gyanendra Kumar Verma for his help and support throughout this journey. My sincere thanks also go to my beloved juniors, Akanksha, Ankit, and Prerna, for their constant help and support, which made this journey engaging and enjoyable.

I am thankful to my roommates and batchmates, Arvish and Soumen, for their constant availability and support throughout this journey. I would also like to thank Anjali and Debika for making this journey memorable. Special thanks also go to Ayushi for being there for me during this period.

I am grateful to my seniors, batchmates, and juniors for making me feel comfortable in the department and for motivating me throughout the past five years. While it is difficult to thank each individual adequately, I would like them to know that the memories shared with them will always remain close to my heart. In particular, I am thankful to Dr. Jyotsna, Dr. Himanshu, Dr. Ritika, Dr. Abhilash, Dr. Satyam, Dr. Shweta, Dr. Lalit, Dr. Naveen, Dr. Priya, Dr. Suraj, Nidhi, Akanksha, Ratnadip, Chetan, Shridharan, Shammi, Sujoy, Sonam, Kislaya, Mangaldeep, Arshi, and Drishti.

I would also like to express special gratitude to my friends—Bishal, Madhumita, Soumyadeep, Abhishek, Aniket, Sachin, Sonu, Ashok, Satyam, Shweta, Sohita, Shiwani, Shilpi, Naresh, Subham, Suman and Dishari—who have been a constant source of support, valuable suggestions, and motivation during challenging times. I am sincerely grateful to all of them for always being there for me.

Special thanks go to Subhajit Sir and his wife, Priyanka ma'am, for their constant support throughout this journey and beyond. Subhajit Sir encouraged me to pursue mathematics and provided invaluable guidance in shaping my academic path.

It is difficult to adequately express my love and gratitude to my family for their constant support and encouragement throughout this journey. I am deeply grateful to my parents for their lifelong support, which sustained my interest in research and motivated me to successfully complete this study. I also sincerely thank my brother, Aman, for his unwavering support, patience, trust, and understanding.

Above all, I am grateful to the Almighty God for blessing me with strength and wisdom throughout this journey.

I apologize for any inadvertent omissions and gratefully thank everyone who supported me throughout this journey.

Abstract

During the transmission of data over a communication channel, errors are inevitable. Coding theory aims to design efficient encoding schemes that enable such errors to be detected and, when possible, corrected. Linear codes, and in particular their subclass of cyclic codes, play a fundamental role in modern communication systems and data storage technologies used in everyday life. The primary objective in coding theory is to construct codes with high error-correcting capability while maintaining minimal redundancy; equivalently, one seeks codes with large relative distance and high code rate. These objectives are inherently conflicting, making their simultaneous optimization a central challenge in coding theory.

A linear code is said to be distance-optimal if no other linear code over the same alphabet with the same length and dimension has a larger distance. Determining the distance of a linear code is, in general, a hard problem, even for structured families such as cyclic codes. In particular, maximum distance separable (MDS) codes attain the largest possible distance as determined by the Singleton bound and are therefore distance-optimal. Reed–Solomon codes are the most prominent examples of MDS codes and are widely used in practice. Beyond Reed–Solomon codes, the construction and structural analysis of MDS codes that are not equivalent to Reed–Solomon codes are a challenging and active area of research.

Beyond reliable communication, linear codes also play a crucial role in information security. In particular, minimal linear codes are instrumental in secret sharing schemes and secure two-party computation, while linear complementary dual (LCD) codes are important in designing countermeasures against side-channel and fault injection attacks. These applications motivate the study of linear codes with broad applicability, including minimal, LCD, and distance-optimal codes.

Let $\mathbb{F}$ be a field. A central algebraic tool employed in this thesis is the notion of an $\mathbb{F}$ -valued trace on a finite-dimensional commutative $\mathbb{F}$ -algebra. A non-zero $\mathbb{F}$ -valued $\mathbb{F}$ -linear map on a finite-dimensional

commutative $\mathbb{F}$ -algebra is called an $\mathbb{F}$ -valued trace if its kernel contains no non-zero ideals. However, given an $\mathbb{F}$ -algebra, such a map may not always exist. In this thesis, we find an infinite class of finite-dimensional commutative $\mathbb{F}$ -algebras which admit an $\mathbb{F}$ -valued trace. In fact, in these cases, we explicitly construct a trace map. An $\mathbb{F}$ -valued trace induces a non-degenerate bilinear form on the underlying $\mathbb{F}$ -algebra, making it both theoretically significant and computationally useful. We further present a couple of applications of an $\mathbb{F}$ -valued trace map to algebraic coding theory. For instance, we show that the subfield codes of codes over an $\mathbb{F}_q$ -algebra can be determined with the help of an $\mathbb{F}_q$ -valued trace, if it exists.

Using the $\mathbb{F}_2$ -valued trace of commutative $\mathbb{F}_2$ -algebras $\mathcal{R}_2 := \mathbb{F}_2[x]/\langle x^3 - x \rangle$ and $\mathcal{A}_s := \mathbb{F}_2[x]/\langle x^s \rangle$, for $s \geq 2$, we study the (binary) subfield codes $\mathcal{C}_D^{(2)}$ of simplicial $\mathcal{C}_D$ -codes over $\mathcal{R}_2$ and $\mathcal{A}_s$. We explicitly determine the Hamming weight distribution of these subfield codes and derive sufficient conditions under which they are minimal, for various choices of the defining set D constructed via simplicial complexes. Moreover, we show that certain classes of these codes attain the Griesmer bound, while others are distance optimal under mild conditions. We also establish sufficient conditions for self-orthogonality of the resulting binary linear codes. As a consequence, we construct several infinite families of minimal, self-orthogonal, distance-optimal projective binary linear codes which are either two-weight or four-weight. To the best of our knowledge, this work constitutes the first systematic study of subfield codes of codes over an $\mathbb{F}_2$ -algebra, and in particular, the first instance in which such subfield codes are explicitly computed using an $\mathbb{F}_2$ -valued trace.

We next study two families of cyclic codes over $\mathbb{F}_q$ of length n denoted by $\mathcal{C}_n$ and $\mathcal{C}_{n,1}$, which are generated by the n -th cyclotomic polynomial $Q_n(x)$ and the polynomial $Q_n(x)Q_1(x)$, respectively. For each integer $n > 1$, we derive explicit formulae for the distances of $\mathcal{C}_n$ and $\mathcal{C}_{n,1}$, and we also obtain a formula for the distance of their Euclidean duals. Moreover, we show that all these codes are LCD, and several subfamilies are both r -optimal and d -optimal locally recoverable codes.

Lastly, we present a new class of codes called row-column twisted Reed–Solomon codes (abbreviated as RCTRS), motivated by the works of Beelen et al. [6] and Liu et al. [51]. We explicitly provide conditions for such codes to be MDS and also ensure their existence. By determining the dimensions of their Schur squares, we prove that these MDS codes are not equivalent to Reed–Solomon codes, thus presenting a new family of non-RS MDS codes. Additionally, we prove that these MDS codes are also not equivalent to column twisted Reed–Solomon codes described by Liu et al. in [51], showing the novelty of our construction.

सार

संचार चैनल पर डेटा के प्रसारण के दौरान, त्रुटियां अपरिहार्य हैं। कोडिंग थ्योरी का उद्देश्य कुशल एन्कोडिंग योजनाओं को डिजाइन करना है जो ऐसी त्रुटियों का पता लगाने और जब संभव हो, ठीक करने में सक्षम बनाता है। लिनियर कोड, और उनके उपवर्ग, विशेष रूप से साइकिलिक कोड, आधुनिक संचार प्रणालियों और रोजमर्रा की जिंदगी में उपयोग की जाने वाली डेटा भंडारण प्रौद्योगिकियों में एक मौलिक भूमिका निभाते हैं। कोडिंग थ्योरी में प्राथमिक उद्देश्य न्यूनतम अतिरेक को बनाए रखते हुए उच्च त्रुटि-सुधार क्षमता वाले कोड का निर्माण करना है; समान रूप से, कोई बड़ी रिलेटिव डिस्टेंस और उच्च कोड रेट वाले कोड की तलाश करता है। ये उद्देश्य स्वाभाविक रूप से परस्पर विरोधी हैं, जो उनके एक साथ अनुकूलन को कोडिंग थ्योरी में एक केंद्रीय चुनौती बनाते हैं।

एक लीनियर कोड को डिस्टेंस-ऑप्टिमल तब कहा जाता है, जब उसी अल्फाबेट पर, उसी लंबाई और डाइमेंशन वाले किसी दूसरे लीनियर कोड की दूरी उससे ज़्यादा न हो। एक लिनियर कोड की न्यूनतम दूरी निर्धारित करना, सामान्य तौर पर, एक कठिन समस्या है, यहां तक कि साइकिलिक कोड जैसे संरचित परिवारों के लिए भी। विशेष रूप से, मैक्सिमम डिस्टेंस सेपरेबल (एमडीएस) कोड सिंगलटन बाउंड द्वारा अनुमत सबसे बड़ी संभव न्यूनतम दूरी प्राप्त करते हैं और इसलिए डिस्टेंस-ऑप्टिमल होते हैं। रीड-सोलोमन कोड एमडीएस कोड के सबसे प्रमुख उदाहरण हैं और व्यवहार में व्यापक रूप से उपयोग किए जाते हैं। रीड-सोलोमन कोड से परे, एमडीएस कोड का निर्माण और विश्लेषण जो रीड-सोलोमन कोड के बराबर नहीं हैं अनुसंधान का एक चुनौतीपूर्ण और सक्रिय क्षेत्र है।

विश्वसनीय संचार के अलावा, लिनियर कोड सूचना सुरक्षा में भी महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। विशेष रूप से, मिनिमल लिनियर कोड्स सीक्रेट शेयरिंग स्कीम्स और सिक्योर टू-पार्टी कम्प्यूटेशन में महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं, जबकि लिनियर कॉम्प्लिमेंटरी ड्यूल (एलसीडी) कोड साइड-चैनल और फॉल्ट-इंजेक्शन हमलों के खिलाफ जवाबी उपायों को डिजाइन करने में महत्वपूर्ण हैं। ये अनुप्रयोग व्यापक प्रयोज्यता के साथ लिनियर कोड के अध्ययन को प्रेरित करते हैं, जिसमें मिनिमल, एलसीडी और डिस्टेंस-ऑप्टिमल कोड शामिल हैं।

मान लीजिए $\mathbb{F}$ एक फ़ील्ड है। इस थीसिस में नियोजित एक केंद्रीय बीजगणितीय उपकरण एक फाइनाइट-डायमेंशनल कम्प्यूटेटिव $\mathbb{F}$ -एल्जेब्रा पर $\mathbb{F}$ -वैल्यूड ट्रेस की धारणा है। एक फाइनाइट-डायमेंशनल कम्प्यूटेटिव $\mathbb{F}$ -एल्जेब्रा पर एक गैर-शून्य $\mathbb{F}$ -वैल्यूड $\mathbb{F}$ -लिनियर को $\mathbb{F}$ -वैल्यूड ट्रेस कहा जाता है यदि इसके कर्नेल में कोई गैर-शून्य आइडियल नहीं है। हालाँकि, ऐसा $\mathbb{F}$ -वैल्यूड ट्रेस एक $\mathbb{F}$ -एल्जेब्रा पर हमेशा मौजूद नहीं हो सकता है। इस थीसिस में, हम फाइनाइट-डायमेंशनल कम्प्यूटेटिव $\mathbb{F}$ -एल्जेब्रा का एक अनंत वर्ग पाते हैं जिसके पास एक $\mathbb{F}$ -वैल्यूड ट्रेस है। वास्तव में, इन मामलों में, हम स्पष्ट रूप से एक $\mathbb{F}$ -वैल्यूड ट्रेस का निर्माण करते हैं। एक $\mathbb{F}$ -वैल्यूड ट्रेस अंतर्निहित $\mathbb{F}$ -एल्जेब्रा पर एक नॉन-डिजेनेरेट बाइलीनियर फॉर्म को इंड्यूस करता है, जिससे यह सैद्धांतिक रूप से महत्वपूर्ण और कम्प्यूटेशनल रूप से उपयोगी दोनों हो जाता है। हम आगे एल्जेब्रिक कोडिंग थ्योरी के लिए $\mathbb{F}$ -वैल्यूड ट्रेस के कुछ अनुप्रयोग प्रस्तुत करते हैं। उदाहरण के लिए, हम दिखाते हैं कि $\mathbb{F}_q$ -एल्जेब्रा पर कोड के सबफील्ड कोड को $\mathbb{F}_q$ -वैल्यूड ट्रेस की मदद से निर्धारित किया जा सकता है, यदि यह मौजूद है।

कम्प्यूटेटिव $\mathbb{F}_2$ -एल्जेब्रा $\mathcal{R}_2 := \mathbb{F}_2[x]/\langle x^3 - x \rangle$ और $\mathcal{A}_s := \mathbb{F}_2[x]/\langle x^s \rangle$, $s \geq 2$ के लिए हम $\mathcal{C}_D$ -कोड के (बाइनरी) सबफील्ड कोड $\mathcal{C}_D^{(2)}$ का अध्ययन करते हैं। हम स्पष्ट रूप से इन सबफील्ड कोड के हैमिंग वेट डिस्ट्रीब्यूशन का निर्धारण करते हैं और पर्याप्त परिस्थितियों को प्राप्त करते हैं जिसके तहत वे मिनिमल हैं, जो सिम्प्लीशियल कॉम्प्लेक्स के ज़रिए बनाए गए डिफाइनिंग सेट D के अलग-अलग विकल्पों के लिए होते हैं। इसके अलावा, हम दिखाते हैं कि इन कोडों के कुछ वर्ग ग्रेस्मर बाउंड प्राप्त करते हैं, जबकि अन्य परिस्थितियों में डिस्टेंस-ऑप्टिमल होते हैं। हम परिणामी बाइनरी

लिनियर कोड की सेल्फ-ऑर्थोगोनलिटी के लिए पर्याप्त शर्तें भी स्थापित करते हैं। नतीजतन, हम मिनिमल, सेल्फ-ऑर्थोगोनल और डिस्टेंस-ऑप्टिमल प्रोजेक्टिव बाइनरी लिनियर कोड के कई अनंत परिवारों का निर्माण करते हैं जो या तो टू-वेट या फोर-वेट होते हैं। हमारी जानकारी के अनुसार, यह कार्य $\mathbb{F}_2$ -एल्जेब्रा पर कोड के सबफील्ड कोड का पहला व्यवस्थित अध्ययन है, और विशेष रूप से, पहला उदाहरण जिसमें इस तरह के सबफील्ड कोड की गणना $\mathbb{F}_2$ -वैल्यूड ट्रेस का उपयोग करके स्पष्ट रूप से की जाती है।

इसके बाद हम $\mathbb{F}_q$ पर लंबाई n वाले साइकलिक कोड के दो परिवारों का अध्ययन करेंगे, जिसे $\mathcal{C}_n$ और $\mathcal{C}_{n,1}$ द्वारा दर्शाया जाता है, जो क्रमशः n -th साइक्लोटोमिक बहुपद $Q_n(x)$ और बहुपद $Q_n(x)Q_1(x)$ द्वारा उत्पन्न होते हैं। प्रत्येक पूर्णांक $n > 1$ के लिए, हम $\mathcal{C}_n$ और $\mathcal{C}_{n,1}$ की दूरी के लिए स्पष्ट सूत्र प्राप्त करते हैं, और हम $\mathcal{C}_n$ और $\mathcal{C}_{n,1}$ के यूक्लिडियन डुअल की दूरी के लिए भी एक सूत्र प्राप्त करते हैं। इसके अलावा, हम दिखाते हैं कि ये सभी कोड एलसीडी हैं, और कई उपपरिवार r -ऑप्टिमल और d -ऑप्टिमल लोकली रिकवरेबल कोड हैं।

अंत में, हम कोडों का एक नया वर्ग प्रस्तुत करते हैं जिसे रो-कॉलम ट्विस्टेड रीड-सोलोमन कोड (आरसीटीआरएस के रूप में संक्षिप्त) कहा जाता है, जो बीलेन एट अल. और लियू एट अल. के कार्यों से प्रेरित है। हम स्पष्ट रूप से ऐसे कोड के एमडीएस होने के लिए शर्तें प्रदान करते हैं और उनके अस्तित्व को भी सुनिश्चित करते हैं। उनके शूर स्क्वेयर के आयामों का निर्धारण करके, हम साबित करते हैं कि ये एमडीएस कोड रीड-सोलोमन कोड के बराबर नहीं हैं, इस प्रकार नॉन-आरएस एमडीएस कोड का एक नया परिवार प्रस्तुत करते हैं। इसके अतिरिक्त, हम साबित करते हैं कि ये एमडीएस कोड भी लियू एट अल. द्वारा वर्णित कॉलम ट्विस्टेड रीड-सोलोमन कोड के बराबर नहीं हैं जो हमारे निर्माण की नवीनता को दर्शाता है।

Contents

Certificate	i
Acknowledgments	iii
Abstract	v
List of Tables	xv
List of Symbols	xvii
1 Introduction	1
1.1 Contributions	5
1.2 Organization of the Thesis	6
2 Preliminaries	9
2.1 Group, Rings, and Fields	9
2.2 Vector Spaces	13
2.3 Modules and Algebras	15
2.4 Finite Fields	17
2.4.1 Cyclotomic Polynomial and its Properties	19
2.5 Algebraic Coding Theory	19
2.5.1 Linear Codes	19
2.5.2 Generator and Parity-Check Matrices	21
2.5.3 Bounds and Optimality	22
2.5.4 Code Equivalence and Schur Products	23
2.5.5 Direct Product of Codes	24

2.5.6	Cyclic Codes	25
2.5.7	Weight Distribution	27
2.5.8	Minimal Codes	27
2.6	Simplicial Complex	28
2.7	Vandermonde Matrix and Elementary Symmetric Function	29
3	$\mathbb{F}$-Valued Trace of a Finite-Dimensional Commutative $\mathbb{F}$-Algebra	31
3.1	$\mathbb{F}$ -Valued Trace	32
3.2	Existence of an $\mathbb{F}$ -Valued Trace for Certain $\mathbb{F}$ -Algebras	34
3.3	Applications of $\mathbb{F}$ -Valued Trace	41
3.3.1	Dual Basis	41
3.3.2	Application to Algebraic Coding Theory	43
3.4	Further Discussions	46
4	Subfield Codes of $\mathcal{C}_D$-Codes over $\mathbb{F}_2[x]/\langle x^3 - x \rangle$	47
4.1	Construction of Subfield Codes of Codes over $\mathcal{R}_2$	48
4.2	Weight Distribution of the Subfield Code $\mathcal{C}_D^{(2)}$ of $\mathcal{C}_D$	50
4.3	Euclidean Dual of the Codes $\mathcal{C}_D^{(2)}$	69
4.4	Examples	73
5	Subfield Codes of $\mathcal{C}_D$-Codes over $\mathbb{F}_2[x]/\langle x^s \rangle$	75
5.1	Construction of Subfield Codes of Codes over $\mathbb{F}_2[x]/\langle x^s \rangle$	76
5.2	Weight Distribution of the Subfield Code $\mathcal{C}_D^{(2)}$ of $\mathcal{C}_D$	77
5.3	Examples	85
6	Cyclic Codes Generated via Cyclotomic Polynomials	87
6.1	Cyclic Codes via Cyclotomic Polynomials	88
6.2	Euclidean Dual of the Codes $\mathcal{C}_n$ and $\mathcal{C}_{n,1}$	91
6.3	Application: A Construction of Cyclic LCD-LRCs	101
7	Row-Column Twisted Reed–Solomon Codes	105
7.1	RCTRS and Their Generator Matrices	106
7.2	RCTRS and Their Extended Codes at $(h, t) = (0, 1)$	109
7.3	RCTRS and Their Extended Codes at $(h, t) = (k - 1, 1)$	118
7.4	A General Class of RCTRS Codes at $t = 1$	122

8 Future Work	127
References	129
Bio-data	137

List of Tables

4.1	Hamming weight distribution of $\mathcal{C}_D^{(2)}$ in Theorem 4.2.1(1)	66
4.2	Hamming weight distribution of $\mathcal{C}_D^{(2)}$ in Theorem 4.2.1(2)	66
4.3	Hamming weight distribution of $\mathcal{C}_D^{(2)}$ in Theorem 4.2.1(3)	66
4.4	Hamming weight distribution of $\mathcal{C}_D^{(2)}$ in Theorem 4.2.1(4)	66
4.5	Hamming weight distribution of $\mathcal{C}_D^{(2)}$ in Theorem 4.2.1(5)	66
4.6	Hamming weight distribution of $\mathcal{C}_D^{(2)}$ in Theorem 4.2.1(6)	67
4.7	Hamming weight distribution of $\mathcal{C}_D^{(2)}$ in Theorem 4.2.1(7)	67
4.8	Hamming weight distribution of $\mathcal{C}_D^{(2)}$ in Theorem 4.2.1(8)	67
4.9	Hamming weight distribution of $\mathcal{C}_{D(c)}^{(2)}$ in Theorem 4.2.1(9)	68
4.10	Minimality and self-orthogonality conditions for $\mathcal{C}_D^{(2)}$ in Theorem 4.2.1	68
4.11	Binary distance-optimal linear codes obtained from Theorem 4.2.1	74
5.1	Hamming weight distribution of $\mathcal{C}_D^{(2)}$ in Theorem 5.2.1 (1)	81
5.2	Hamming weight distribution of $\mathcal{C}_D^{(2)}$ in Theorem 5.2.1 (2)	81
5.3	Hamming weight distribution of $\mathcal{C}_D^{(2)}$ in Theorem 5.2.1 (3)	81
5.4	Hamming weight distribution of $\mathcal{C}_D^{(2)}$ in Theorem 5.2.1 (4)	82
5.5	Hamming weight distribution of $\mathcal{C}_D^{(2)}$ in Theorem 5.2.1 (5)	82
5.6	Hamming weight distribution of $\mathcal{C}_D^{(2)}$ in Theorem 5.2.2 (1)	84
5.7	Hamming weight distribution of $\mathcal{C}_D^{(2)}$ in Theorem 5.2.2 (2)	84
5.8	Minimality and self-orthogonality conditions for $\mathcal{C}_D^{(2)}$ in Theorems 5.2.1 and 5.2.2	85
5.9	Binary distance-optimal binary codes obtained from Theorems 5.2.1 and 5.2.2	86

List of Symbols

Symbol	Meaning
$\mathbb{N}$	The set of natural numbers $\{1, 2, 3, \dots\}$
$[m]$	The set $\{1, 2, 3, \dots, m\}$
$2^{[m]}$	The set of all subsets of $[m]$
Δ_L	The simplicial complex generated by the subset $L \subseteq [m]$
$ L $	The cardinality of the set L
$\mathbb{Z}$	The ring of integers
R^*	Group of units of a ring R
$\mathbb{Z}_n$	The ring of integers modulo n
R/I	The quotient ring of R by the ideal I
$\mathbb{F}_q$	The finite field of order q , where q is a prime power
$\mathbb{F}_q[x]$	The ring of all polynomials over $\mathbb{F}_q$
$\mathbb{F}_q[x]_{<k}$	The $\mathbb{F}_q$ -vector space of all polynomials of degree less than k
$\lceil x \rceil$	The smallest integer greater than or equal to x
$\lfloor x \rfloor$	The largest integer less than or equal to x
$\text{wt}(\mathbf{v})$	The Hamming weight of a vector $\mathbf{v}$
$d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$	The Hamming distance between $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$
$\delta_{i,j}$	The Kronecker delta, defined by $\delta_{i,j} = 1$ if $i = j$, and 0 otherwise

