EXISTENCE AND MULTIPLICITY RESULTS FOR NONLOCAL ELLIPTIC EQUATIONS AND SYSTEMS

GURDEV CHAND ANTHAL

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI

January 2024

© Indian Institute of Technology Delhi (IITD), New Delhi, 2024

EXISTENCE AND MULTIPLICITY RESULTS FOR NONLOCAL ELLIPTIC EQUATIONS AND SYSTEMS

by

GURDEV CHAND ANTHAL

Department of Mathematics

Submitted

in fulfillment of the requirements of the degree of Doctor of Philosophy

to the

Indian Institute of Technology Delhi

January 2024

Dedicated to my parents.

Certificate

This is to certify that the thesis entitled **Existence and multiplicity results for nonlocal elliptic equations and systems** submitted by **Gurdev Chand Anthal** to the Indian Institute of Technology Delhi, for the award of the degree of **Doctor of Philosophy** is a record of the original bonafide research work carried out by him under my supervision and guidance. The thesis has reached the standards fulfilling the requirements of the regulations relating to the degree.

The results contained in this thesis have not been submitted in part or full to any other University or Institute for the award of any degree or diploma.

Prof. Konijeti Sreenadh
Institute Chair Professor
Department of Mathematics
Indian Institute of Technology Delhi
New Delhi 110016

Prof. Jacques Giacomoni
Professor
LMAP (UMR E2S UPPA CNRS 5142)
Bat. IPRA
Avenue de l'Université
64013 Pau, France

Acknowledgements

With the utmost respect and gratitude, I would like to extend my heartfelt appreciation to all the individuals who have played a significant role in making this thesis a reality.

First and foremost, I am deeply thankful to my esteemed advisors, Prof. Jacques Giacomoni and Prof. Konijeti Sreenadh. Working under their invaluable guidance has been a privilege, and their unwavering support, insightful interactions, determination, and passion have elevated the quality of my work. Their objective analysis and constant motivation have helped me develop and refine my skills, and I am indebted to them for their mentorship, which has made this thesis possible.

I also express my gratitude to the members of the Student Research Council (SRC), Prof. Sivanathan Sampath, Prof. Anant Kumar Majee, and Prof. Amruta Mishra, for generously offering their time and valuable suggestions. I am grateful to all the teachers who have contributed to my academic journey.

I must acknowledge the financial support provided by CSIR (Council of Scientific and Industrial Research) during my research work. I am thankful to Prof. Kaushik Bal (IIT Kanpur) for taking time from his busy schedule to attend my CSIR fellowship extension seminar. Additionally, I extend my gratitude to IIT Delhi for providing excellent facilities and financial support through RSTA to attend a conference in Italy.

My heartfelt thanks go to my senior, Dr. Deepak Kumar, for his assistance, constant support, and valuable discussions throughout my Ph.D. journey. I am also grateful to Dr. Divya Goel for her support. Special appreciation is due to my fellow Ph.D. companion, Sushmita Rawat, for her constant motivation, suggestions, and support.

I also want to acknowledge the pleasant working environment created by my labmates. My stay at IIT Delhi would not have been enjoyable without my friends Aakash, Abhilash, Abhinay, Anshul, Anisha, Divay, Gyanendra, Himanshu, Jyotsna, Manuj, Praveen, Ritika, Sachin, San-

tosh, Tanvi etc . To all of them, I extend my thanks for creating unforgettable memories. I also appreciate my juniors Diksha, Needhi, and Shammi for their love and support.

I am deeply grateful to my parents, Joginder Chand Anthal and Kaushalaya Devi, for their unconditional love, unwavering support, and encouragement. Their blessings and sacrifices have made this journey possible. I extend my love and thanks to my brother, Sehdev, and sister, Shilpa, for their constant love and support. Special thanks to my life partner, Reetika Pathiala, whose unwavering support and encouragement have been instrumental in making this journey possible.

Finally, I humbly thank the Almighty for showering me with abundant opportunities and blessings throughout this journey.

New Delhi *Gurdev*

2024

Abstract

In this thesis, our focus lies on investigating the existence and regularity theory of weak solutions to a class of nonlocal elliptic equations and systems. These equations and systems involve nonlocal and critical nonlinearities, making them relevant in various physical applications, such as finance mathematics, biomathematics, and animal foraging, among others. The thesis is structured into five chapters.

Chapter 1 serves as an introduction, where we present the background and current state of research related to the forthcoming chapters. Additionally, we outline the organization of the thesis and highlight the main contributions we have made.

In Chapter 2, we examine a particular class of elliptic problems involving a combination of local and nonlocal operators, together with nonlocal nonlinearities. Specifically, the nonlinearity considered is a blend of critical Hartree type nonlinearity and either regular or singular perturbation. Our analysis begins by studying the optimal constant associated with the mixed Hardy-Littlewood-Sobolev type inequality. We then proceed to investigate the existence, nonexistence, and regularity of weak solutions for the regularly perturbed problem, employing the variational approach. Additionally, we explore the existence, multiplicity, and regularity theory of the singularly perturbed problem, utilizing a non-smooth analysis approach in this direction.

Chapter 3 of this thesis is dedicated to presenting the existence and regularity results for nontrivial weak solutions in two separate sections. The first section deals with a fractional p-Laplacian logistic problem involving Choquard nonlinearity. Similarly, the second section focuses on an elliptic problem characterized by singular absorption nonlinearity and subcritical exponential Choquard type nonlinearity. One of the main challenges encountered in logistic type problems is the absence of a comparison principle due to Choquard type nonlinearity. To overcome this obstacle, we introduce the concept of strong supersolution and uniform subsolution (with respect to a strong supersolution). Additionally, we explore the corresponding Brezis-Niremberg

type problem and obtain the existence of a weak solution. Moreover, we prove the existence of a least energy nodal solution by using the minimization techniques on the Nehari nodal set. Concerning the problem involving singular absorption nonlinearity, we first analyse the existence and uniform estimates of weak solutions for an approximated regularized problem, employing the Mountain pass theorem. By establishing essential gradient estimates for the solution of the approximating problem, we then proceed to take limits and consequently prove that the original problem has a weak solution.

In Chapter 4, we explore an elliptic problem characterized by singular discontinuous nonlinearity in combination with a critical Hartree type nonlinearity. The presence of this singular discontinuous nonlinearity causes the associated energy functional to be non-differentiable and not even locally Lipschitz continuous. To address this challenge, we utilize regularization techniques, which render the associated energy functional differentiable. The first solution is then obtained as the limit of solutions to the regularized problem, which is subsequently shown to be a local minimum of the associated energy functional in the $H_0^1(\Omega)$- topology. To find the second solution, we perform a translation of the original problem using the first solution obtained above. This translation makes the associated energy functional Locally Lipschitz, enabling us to employ the notion of generalized gradients. Through the use of the concentration compactness and the Ekeland variational principles, we establish the existence of the second solution. Finally, by acquiring the L^∞ estimate and analysing the boundary behaviour of the weak solution, we demonstrate the Hölder regularity results.

In Chapter 5, our focus is on examining a singularly perturbed coupled Schrödinger system that involves the fractional half Laplacian and critical exponential type nonlinearity. We examine the existence and concentrating behaviour of semiclassical states for this system. Initially, we analyse the corresponding limit problem and demonstrate the existence of ground state solutions. Our approach in this regard is based on the Nehari Manifold technique, inspired by Pankov's work. Furthermore, we derive a priori estimates for these ground states and subsequently utilize these estimates to study the concentrating profile of the semiclassical solutions. Additionally, we present a novel and independently interesting result in the form of a Pohožaev type identity for the limit problem. This identity is entirely new and constitutes a valuable contribution to the field.

सार

इस थीसिस में, हमारा ध्यान नोनलोकल अण्डाकार समीकरणों और प्रणालियों के एक वर्ग के लिए वीक सोल्युशंस के अस्तित्व और नियमितता सिद्धांत की जांच पर केंद्रित है। इन समीकरणों और प्रणालियों में शामिल हैं नोनलोकल क्रिटिकल गैर-रैखिकताएँ जो की उन्हें विभिन्न भौतिक अनुप्रयोगों में प्रासंगिक बनाती हैं, जैसे वित्त गणित, बायोमैथमैटिक्स और पशु चारागाह आदि के रूप में। यह थेसिस पाँच अध्यायों में संरचित की गयी है।

अध्याय 1 एक परिचय के रूप में कार्य करता है, जहां हम आगामी अध्यायों से संबंधित शोध की पृष्ठभूमि और वर्तमान स्थिति प्रस्तुत करते है। इसके अतिरिक्त, हम थेसिस के संगठन की रूपरेखा तैयार करते हैं और हमारे द्वारा किए गए मुख्य योगदान पर प्रकाश डालते हैं।

अध्याय 2 में, हम अण्डाकार समस्याओं के एक विशेष वर्ग की जांच करते हैं जोकि स्थानीय और गैर-स्थानीय ऑपरेटरों के साथ-साथ गैर-स्थानीय गैर-रैखिकताएँ के संयोजन से बनी है। विशेष रूप से, मानी जाने वाली गैर-रैखिकता महत्वपूर्ण हार्ट्री प्रकार की गैर-रैखिकता और रेगुलर या सिंगुलर गैर-रैखिकताएँ का मिश्रण है। व्याकुलता. हमारा विश्लेषण मिक्स्ड हार्डी-लिटलवुड-सोबोलेव असमानता से जुड़े ओपतिमल कोंस्टंट का अध्ययन करके शुरू होता है। इसके बाद हम रेगुलरली पेरतुरबेड समस्या के लिए वीक सोल्यूशंस के अस्तित्व, अस्तित्वहीनता और नियमितता की जांच करने के लिए आगे बढ़ते हैं। इसके अतिरिक्त, हम सिंगुलरली पेरतुरबेड समस्या के अस्तित्व, बहुलता और नियमितता सिद्धांत का पता लगाते हैं। इस दिशा में हम एक गैर-सुचारू विश्लेषण दृष्टिकोण का उपयोग करते हैं।

इस थीसिस का अध्याय 3 दो अलग-अलग खंडों में गैर-तुच्छ वीक सोल्युशंस के अस्तित्व और नियमितता परिणामों को प्रस्तुत करने के लिए समर्पित है। पहला खंड मैं हम फ्रक्टिओनल पी-लाप्लासियन से संबंधित लॉजिस्टिक चॉक्कर्ड समस्या का अध्यान करते हैं। इसी प्रकार, दूसरा खंड एक अण्डाकार समस्या पर केंद्रित है जिसमे सिंगुलर अवशोषण गैर-रैखिकता और सब-क्रिटिकल चोक्कार्ड प्रकार की गैर-रैखिकता का मिश्रण है। लॉजिस्टिक प्रकार की समस्याओं में आने वाली मुख्य चुनौतियों में से एक चोक्कार्ड प्रकार की गैर-रैखिकता के कारण तुलना सिद्धांत का अभाव है। इस पर काबू पाने के लिए, हम स्ट्रॉंग सुपरसोल्यूशन और उन्नीफ़ोर्म सबसोल्यूशन (एक स्ट्रॉंग सुपेर्सोलूटीओन के संबंध में) की अवधारणा का परिचय देते हैं। इसके अतिरिक्त, हम संबंधित ब्रेज़िस-निरेम्बर्ग प्रकार की समस्या का पता लगाते हैं और एक वीक सोल्यूशन के अस्तित्व को प्राप्त करते हैं। इसके अलावा, हम नेहारी नोडल सेट पर न्यूनतमकरण तकनीकों का उपयोग करके न्यूनतम ऊर्जा नोडल सोल्यूशन के अस्तित्व को सिद्ध करते हैं। सिंगुलर अवशोषण गैर-रैखिकता से जुड़ी समस्या के संबंध में, हम पहले माउंटेन पास प्रमेय की मदद से एक अनुमानित नियमितीकृत समस्या के लिए वीक सोल्यूशंस के अस्तित्व और समान अनुमान का विश्लेषण करते हैं। अनुमानित नियमितीकृत समस्या के सोल्यूशंस के लिए आवश्यक ग्रेडिएंट अनुमान स्थापित करके, हम फिर सीमाएं लेने के लिए आगे बढ़ते हैं और परिणामस्वरूप मूल समस्या के वीक सोल्यूशन के अस्तित्व को साबित करते हैं।

अध्याय 4 में, हम एक अण्डाकार समस्या का पता लगाते हैं जो एक महत्वपूर्ण हार्ट्री प्रकार की गैर-रैखिकता के साथ संयोजन में सिंगुलर असतत गैर-रैखिकता की विशेषता है। इस सिंगुलर असतत गैर-रैखिकता की उपस्थिति संबंधित ऊर्जा कार्यात्मकता की ना ही केवल गैर-विभेदित बल्कि स्थानीय स्तर पर भी लिप्सचिट्ज़ सतत ना होने का कारण बनती है। इस चुनौती का समाधान करने के लिए, हम नियमितीकरण तकनीक का उपयोग करते हैं, जो संबंधित ऊर्जा कार्यात्मकता को भिन्न बनाती है। पहला सोल्यूशन नियमित समस्या के सोल्युशंस की सीमा के रूप में प्राप्त किया गया है, जिसे बाद में संबंधित ऊर्जा कार्यात्मकता का $H_0^1(\Omega)$- टोपोलॉजी में एक स्थानीय न्यूनतम दिखाया गया है। दूसरा सोल्यूशन खोजने के लिए, हम प्राप्त पहले सोल्यूशन का उपयोग करके मूल समस्या को ट्रांसलएट करते हैं। यह ट्रान्स्लटीओन संबंधित ऊर्जा को स्थानीय रूप से लिप्सचिट्ज़ सतत बनाता है, जिससे हम सामान्यीकृत ग्रेडियेंट की धारणा का उपयोग करने मे सक्षम हो जाते हैं। एकाग्रता सघनता के उपयोग के माध्यम से और एकलैंड वारियाटीओनल सिद्धांतों के आधार पर, हम दूसरे सोल्यूशन के अस्तित्व को स्थापित करते हैं।

अंत में L^∞ अनुमान प्राप्त करके और वीक सोल्यूशन के सीमा व्यवहार का विश्लेषण करके, हम हेल्डर नियमितता परिणाम प्रदर्शित करहे हैं।

अध्याय 5 में, हमारा ध्यान एक विलक्षण रूप से विकृत युग्मित श्रोडिंगर प्रणाली की जांच करने पर है जिसमे फ्रक्टिओनल हल्फ लाप्लासियन और महत्वपूर्ण घातीय प्रकार की गैर-रैखिकता शामिल है। हम इस प्रणाली के लिए अर्धशास्त्रीय अवस्थाओं का अस्तित्व और संकेंद्रित व्यवहार की जांच करते हैं । प्रारंभ में, हम संबंधित सीमा समस्या का विश्लेषण करते हैं और ग्राउंड स्टेट सोल्यूशन के अस्तित्व को प्रदर्शित करते हैं। इस संबंध में हमारा दृष्टिकोण पैनकोव से प्रेरित नेहारी मैनिफोल्ड तकनीक पर आधारित है। इसके अलावा, हम इन ग्राउंड स्टेट्स के लिए एक प्राथमिक अनुमान प्राप्त करते हैं और बाद में उसका उपयोग करते हैं अर्धशास्त्रीय समाधानों की संकेंद्रित प्रोफ़ाइल का अध्ययन करने के लिए हैं। इसके अतिरिक्त, हम पोहोज़ेव प्रकार की आइडैनटिटि के रूप में एक उपन्यास और स्वतंत्र रूप से दिलचस्प परिणाम प्रस्तुत करते हैं। सीमा समस्या के लिए. यह आइडैनटिटि पूरी तरह से नई है और इस फील्ड एक मूल्यवान योगदान है।

Contents

Certificate i

Acknowledgements iii

Abstract v

List of Symbols xi

1 Introduction 1

1.1 Preliminaries . . . 2

1.2 Problem involving mixed operators . . . 6

1.3 Problems involving Choquard nonlinearity . . . 8

1.4 Critical exponent problems . . . 9

1.5 Problems involving singular nonlinearity . . . 11

1.6 Logistic problems . . . 13

1.7 Coupled Schrödinger systems . . . 15

1.8 Organization of the thesis . . . 17

1.8.1 Elliptic problems involving mixed operators . . . 17

1.8.2 Some elliptic problems involving Choquard nonlinearity . . . 22

1.8.3 Elliptic problem with singular discontinuous nonlinearity . . . 26

1.8.4 Fractional Hamiltonian type system on $\mathbb{R}$ with critical growth nonlinearity 28

2 Elliptic problems involving mixed operators 33

2.1 Introduction . . . 33

2.2 Mixed Hardy-Littlewood- Sobolev inequality . . . 38

2.3 Study of Critical problems: Regular Case . . . 41
2.3.1 Regularity of solutions and Pohožaev identity . . . 42
2.3.2 The linear case p=1 . . . 50
2.3.3 The superlinear case . . . 55
2.4 Study of Critical Problems: Singular Case . . . 59
2.4.1 Notion of Nonsmooth analysis . . . 63
2.4.2 Regularity and comparison principle . . . 64
2.4.3 Existence and multiplicity of positive solution . . . 73
2.4.4 Second solution . . . 83
2.5 Conclusion and future directions . . . 86

3 Some elliptic problems involving Choquard nonlinearity 89
3.1 Logistic Choquard Problem . . . 90
3.1.1 A priori estimates . . . 93
3.1.2 Regular Case . . . 97
3.1.3 Singular Case . . . 104
3.1.4 Brezis-Niremberg for logistic Choquard . . . 106
3.1.5 Existence of least energy nodal solution. . . . 112
3.2 Logarithmic singularity . . . 122
3.2.1 Preliminary Results . . . 124
3.2.2 Solution and uniform bounds of approximated problem . . . 128
3.2.3 Gradient estimates for solution of the approximate problem . . . 142
3.2.4 The limit of approximate solutions . . . 146
3.3 Conclusion and future directions . . . 149

4 Elliptic problem with singular discontinuous and critical Choquard nonlinearity 151
4.1 Introduction . . . 151
4.2 The purely singular Discontinuous problem . . . 154
4.3 Existence of a first solution . . . 167
4.4 Existence of a second solution . . . 172
4.5 Regularity Results . . . 186
4.6 Conclusion and future directions . . . 188

5 Fractional Hamiltonian type system on $\mathbb{R}$ with critical growth nonlinearity 191

5.1 Introduction . . . 191

5.2 Functional setting and generalized Nehari manifold . . . 196

5.3 Proof of Theorem 5.1.2 . . . 200

5.4 A priori estimates . . . 205

5.5 Pohožaev type identity . . . 213

5.5.1 Regularity for the approximating problem . . . 217

5.5.2 End of Theorem 5.1.6 . . . 220

5.6 Singularly perturbed system . . . 226

5.6.1 Functional setting . . . 226

5.6.2 Lower and upper bounds for m_ϵ^* . . . 228

5.6.3 Existence of solutions to system (5.53) . . . 228

5.6.4 Existence of ground state solutions for (5.53) . . . 231

5.6.5 Concentration . . . 232

5.7 Conclusion and future directions . . . 233

References 235

List of Publications 249

Curriculum Vitae 251

List of Symbols

Symbol	**Meaning**
X^n	n-dimensional Cartesian Product of a set X.
$\mathbb{R}$	Set of real numbers.
$\mathbb{N}$	Set of natural numbers.
$\|U\|$	Lebesgue measure of a set $U \subset \mathbb{R}^n$.
∂U	Boundary of a set $U \subset \mathbb{R}^n$
$B_r(x)$	Ball of radius r and centered at $x \in \mathbb{R}^n$.
$U \Subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$	$\overline{U} \subset \Omega$ and U is bounded.
χ_U	Characteristic function of the set U.
u^+	$\max\{u, 0\}$.
u^-	$\max\{-u, 0\}$
$\text{supp}(u)$	Closure of the set $\{x : u(x) \neq 0\}$ in $\mathbb{R}^n$.
$C_0^\infty(\Omega)$	Set of infinitely differentiable functions with compact support in Ω.
$\|f\|_V$	Norm of f in vectors space V.