

DOMINATION AND ITS VARIATIONS: STRUCTURAL AND ALGORITHMIC STUDY

POOJA GOYAL



DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI
SEPTEMBER 2022

© Indian Institute of Technology Delhi (IITD), New Delhi, 2022

**DOMINATION AND ITS VARIATIONS:
STRUCTURAL AND ALGORITHMIC STUDY**

by

POOJA GOYAL

Department of Mathematics

Submitted

in fulfillment of the requirements of the degree of Doctor of Philosophy

to the



**Indian Institute of Technology Delhi
SEPTEMBER 2022**

Dedicated to
My Family

Certificate

This is to certify that the thesis entitled “**Domination and Its Variations: Structural and Algorithmic Study**” submitted by “**Ms. Pooja Goyal**” to the **Indian Institute of Technology Delhi**, for the award of the Degree of **Doctor of Philosophy**, is a record of the original bona fide research work carried out by her under my supervision and guidance. The thesis has reached the standards fulfilling the requirements of the regulations relating to the degree.

The results contained in this thesis have not been submitted in part or full to any other university or institute for the award of any degree or diploma.

Prof. Bhawani Sankar Panda
Department of Mathematics
Indian Institute of Technology Delhi

Acknowledgements

First of all, I would like to express my sincere gratitude to my Ph.D. supervisor, Prof. B. S. Panda, for his constant support and guidance without which this research would not have been possible. I am grateful to have the pleasure of working with him. His invaluable advice, research discussions, and constant guidance not only helped me grow as a researcher but also as an individual. I cannot say thank you enough for his tremendous support and help.

I would also like to thank my Student Research Committee members (SRC members): Prof. Niladri Chatterjee (Mathematics Department), Prof. Vikas Vikram Singh (Mathematics Department), and Prof. Amitabha Bagchi (Computer Science and Engineering Department), for their useful suggestions. I am extremely grateful to the Department of Mathematics and IIT Delhi authorities for providing me financial support and excellent state of facilities during my Ph.D. program.

A special thanks to my senior / colleagues, Dr. Shaily Verma, Dr. Juhi Chaudhary and Dr. Sanjay Kumar, who helped me in every possible way in my research. I also like to thank Dr. Dinabandhu Pradhan to spare his valuable time and give suggestions in my research work. I would like to extend my sincere thanks to all my school and college teachers who were the initial building blocks of my academic journey.

I would like to acknowledge all the wonderful people I met during my Ph.D. I want to thank my friends Aman, Anshu, Archana, Priyamvada, Surbhi, Raksha, and my lovely juniors Sachin, Rumki, and Soumyashree for their friendly assistance. I would also like to extend my appreciation to my dear friends Amrita, Anu, and Savita for their constant motivation during hard times.

I would like to show my greatest appreciation, my love and gratitude towards my family for their affection, encouragement, support, and unfailing faith in me. I want to express my love and appreciation to my husband and my parents for their sacrifices, patience, unconditional support, and encouragement. I am deeply grateful to my siblings, Nidhi and Vaibhav, who provided constant encouragement and were always willing and enthusiastic to assist throughout the Ph.D. program. Many thanks to my cousins, and my in-laws for their love and continuous support.

Last but not least, I would like to thank God for giving me countless blessings, strength and patience throughout this journey.

Thank you all for having belief in me!

Pooja Goyal

Abstract

Domination is one of the important and widely studied areas of research in graph theory. A set $D \subseteq V$ of vertices of a graph $G = (V, E)$ is called a *dominating set* if every vertex not in D is adjacent to at least one member of D . Given a graph G , MINIMUM DOMINATION is the problem of finding a dominating set of minimum cardinality in G . DECIDE DOMINATION is the decision version of MINIMUM DOMINATION. The *domination number* of G is the minimum cardinality among all dominating sets in G and is denoted by $\gamma(G)$. A vertex v is said to dominate itself and all of its neighbors.

In this thesis, we study the algorithmic aspects of some variations of domination, namely (i) Global total k -domination, (ii) Differentiating-total domination, (iii) Global Roman domination, (iv) Roman $\{3\}$ -domination, and (v) Connected power domination.

A subset $D \subseteq V$ of a graph $G = (V, E)$ is called a *global total k -dominating set (GTkD-set)* of G if every vertex in V is adjacent as well as non-adjacent to at least k vertices in D . MINIMUM GLOBAL TOTAL k -DOMINATION is to find a minimum cardinality *global total k -dominating set (GTkD-set)* of G and DECIDE GLOBAL TOTAL k -DOMINATION is the decision version of MINIMUM GLOBAL TOTAL k -DOMINATION. DECIDE GLOBAL TOTAL k -DOMINATION is known to be

NP-complete [8]. We strengthen this result by proving that DECIDE GLOBAL TOTAL k -DOMINATION is NP-complete for bipartite graphs, perfect elimination bipartite graphs, star-convex bipartite graphs, chordal graphs and doubly chordal graphs. We propose a polynomial-time algorithm to obtain a minimum cardinality global total k -dominating set in chordal bipartite graphs. We design a $2(1 + \ln n)$ -approximation algorithm for MINIMUM GLOBAL TOTAL k -DOMINATION. Further, we prove that MINIMUM GLOBAL TOTAL k -DOMINATION is hard to approximate within a factor of $(1 - \epsilon) \ln n$ for any $\epsilon > 0$ unless $P = NP$. Also, we show that MINIMUM GLOBAL TOTAL k -DOMINATION admits a constant factor approximation algorithm. Then we prove that MINIMUM GLOBAL TOTAL k -DOMINATION is APX-complete for bounded degree bipartite graphs as well as for chordal graphs. Finally, we show that for bipartite graphs and for chordal graphs DECIDE GLOBAL TOTAL k -DOMINATION is W[2]-hard when parameterized by the size of a GTkD-set in G .

A subset $D \subseteq V$ of a graph $G = (V, E)$ is called a *differentiating-total dominating set (DTD-set)*, of G if (a) $N_G(v) \cap D \neq \emptyset$ for all $v \in V$, and (b) $N_G[u] \cap D \neq N_G[v] \cap D$, for every distinct pair $u, v \in V$. MINIMUM DIFFERENTIATING-TOTAL DOMINATION is to find a minimum cardinality *differentiating-total dominating set (DTD-set)* of G and DECIDE DIFFERENTIATING-TOTAL DOMINATION is the decision version of MINIMUM DIFFERENTIATING-TOTAL DOMINATION. We initiate the algorithmic complexity of differentiating-total domination. We show that DECIDE DIFFERENTIATING-TOTAL DOMINATION is NP-complete for chordal bipartite graphs, star-convex bipartite graphs, chordal graphs, and planar graphs. We propose an approximation algorithm for MINIMUM DIFFERENTIATING-TOTAL DOMINATION with approximation factor $O(\ln \Delta(G))$ for any graph G with maximum degree $\Delta(G)$. Further, we prove that MINIMUM DIFFERENTIATING-TOTAL DOMINATION is hard to approximate for any bipartite graph within a factor of $(\frac{1}{2} - \epsilon) \ln n$

for any $\epsilon > 0$ unless $P = NP$. Finally, we show that MINIMUM DIFFERENTIATING-TOTAL DOMINATION is APX-complete for bounded degree bipartite graphs.

A function $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ is called a *global Roman dominating function (GRDF)* of G if every vertex of weight 0 is adjacent as well as non-adjacent to a vertex of weight 2. The weight of a function f is defined as $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$ and the minimum weight of a GRDF of G is known as *global Roman domination number* of G . MINIMUM GLOBAL ROMAN DOMINATION is to find a minimum weight *global Roman dominating function (GRDF)* of G and DECIDE GLOBAL ROMAN DOMINATION is the decision version of MINIMUM GLOBAL ROMAN DOMINATION. We initiate the algorithmic complexity of global Roman domination. We prove that DECIDE GLOBAL ROMAN DOMINATION is NP-complete for bipartite graphs, chordal bipartite graphs, planar bipartite graphs, star-convex bipartite graphs, and chordal graphs. On the positive side, we show that MINIMUM GLOBAL ROMAN DOMINATION is polynomial-time solvable for chain graphs and threshold graphs. We design a $4(1 + \ln n)$ -approximation algorithm for MINIMUM GLOBAL ROMAN DOMINATION. Further, we prove that MINIMUM GLOBAL ROMAN DOMINATION is hard to approximate within a factor of $(1 - \epsilon) \ln n$ for any $\epsilon > 0$ unless $P = NP$. We show that the same inapproximability result holds for bipartite graphs as well. Finally, we show that MINIMUM GLOBAL ROMAN DOMINATION admits a $O(\ln \Delta(G))$ approximation algorithm for any bipartite graph G with maximum degree $\Delta(G)$. Then we prove that MINIMUM GLOBAL ROMAN DOMINATION is APX-complete for bounded degree graphs as well as for bounded degree bipartite graphs.

A function $f : V \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ is called a *Roman $\{3\}$ -dominating function (R3DF)* such that for every vertex $v \in V$, if $f(v) \in \{0, 1\}$, then $\sum_{u \in N[v]} f(u) \geq 3$. The weight of a function f is defined as $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$ and the minimum weight of a R3DF of G is known as the *Roman $\{3\}$ -domination number* of G . MINIMUM ROMAN $\{3\}$ -DOMINATION is to find a minimum weight *Roman $\{3\}$ -dominating*

function (*R3DF*) of G and DECIDE ROMAN $\{3\}$ -DOMINATION is the decision version of MINIMUM ROMAN $\{3\}$ -DOMINATION. DECIDE ROMAN $\{3\}$ -DOMINATION is known to be NP-complete for bipartite graphs [49]. We strengthen this result by proving that DECIDE ROMAN $\{3\}$ -DOMINATION is NP-complete for star-convex bipartite graphs, chordal graphs, and split graphs. We propose linear time algorithms to solve MINIMUM ROMAN $\{3\}$ -DOMINATION in chain graphs and threshold graphs. We propose an approximation algorithm for MINIMUM ROMAN $\{3\}$ -DOMINATION with approximation factor $O(\ln \Delta(G))$ for any graph G with maximum degree $\Delta(G)$. Further, we prove that MINIMUM ROMAN $\{3\}$ -DOMINATION is hard to approximate for any graph within a factor of $(1 - \epsilon) \ln n$ for any $\epsilon > 0$ unless $P = NP$. Finally, we show that MINIMUM ROMAN $\{3\}$ -DOMINATION is APX-complete for bounded degree bipartite graphs.

A subset $D \subseteq V$ of a graph $G = (V, E)$ is called a *power dominating set* if every vertex of the graph can be observed by D by considering the following two observation rules:

OR1: if $v \in D$, then v can observe itself and all its neighbors.

OR2: for an already observed vertex whose all neighbors except one are observed, then the only unobserved neighbor becomes observed as well.

A subset $D \subseteq V$ of a graph $G = (V, E)$ is called a *connected power dominating set* if D is a power dominating set of G and the subgraph induced by D is connected in G . MINIMUM CONNECTED POWER DOMINATION is to find a minimum cardinality *connected power dominating set* of G and DECIDE CONNECTED POWER DOMINATION is the decision version of *Minimum Connected power dominating set* of G . DECIDE CONNECTED POWER DOMINATION is known to be NP-complete for general graphs [13]. We strengthen this result by proving that DECIDE CONNECTED

POWER DOMINATION is NP-complete for perfect elimination bipartite graphs, star-convex bipartite graphs, and split graphs. On the positive side, we show that MINIMUM CONNECTED POWER DOMINATION can be solved in polynomial time for chain graphs and threshold graphs. We also prove that, for bipartite graphs and for chordal graphs, MINIMUM CONNECTED POWER DOMINATION is hard to approximate within a ratio of $(1 - \epsilon) \ln n$ for any $\epsilon > 0$ unless $P = NP$. Finally, we show that MINIMUM CONNECTED POWER DOMINATION is APX-hard for graphs with maximum degree 5.

सार

वर्चस्व ग्राफ सिद्धांत में अनुसंधान के महत्वपूर्ण और व्यापक रूप से अध्ययन किए गए क्षेत्रों में से एक है। एक ग्राफ $G=(V,E)$ के शीर्षों का एक समुच्चय $D \subseteq V$ एक प्रमुख समुच्चय कहलाता है यदि प्रत्येक शीर्ष जो D में नहीं है, D के कम से कम एक सदस्य के निकट है। एक ग्राफ G को देखते हुए, न्यूनतम डोमिनेशन खोजने की समस्या है G में न्यूनतम कार्डिनैलिटी का एक डोमिनेटिंग सेट। डिसाइड डोमिनेशन न्यूनतम डोमिनेशन का निर्णय संस्करण है। G का डोमिनेशन संख्या G में सभी प्रमुख सेटों में न्यूनतम कार्डिनैलिटी है और इसे $\gamma(G)$ द्वारा दर्शाया जाता है। कहा जाता है कि एक शीर्ष v स्वयं और उसके सभी पड़ोसियों पर हावी है।

इस थीसिस में, हम वर्चस्व के कुछ रूपों के एल्गोरिथम पहलुओं का अध्ययन करते हैं, अर्थात् (i) वैश्विक कुल k -प्रभुत्व, (ii) विभेदक-कुल वर्चस्व, (iii) वैश्विक रोमन वर्चस्व, (iv) रोमन $\{3\}$ -वर्चस्व, और (v) कनेक्टेड पावर वर्चस्व।

एक ग्राफ $G=(V,E)$ का एक उपसमुच्चय $D \subseteq V$ वैश्विक कुल k -प्रभुत्व समुच्चय कहलाता है, यदि G का प्रत्येक शीर्ष D में कम से कम k शीर्षों के आसन्न हो साथ-साथ कम से कम k शीर्षों के आसन्न न हो। न्यूनतम वैश्विक कुल k -वर्चस्व G का न्यूनतम कार्डिनैलिटी ग्लोबल टोटल के-डोमिनेटिंग सेट (जीटीकेडी-सेट) खोजने के लिए और डिसाइड ग्लोबल टोटल के-डोमिनेशन न्यूनतम ग्लोबल टोटल के-डोमिनेशन का निर्णय संस्करण है। डिसाइड वैश्विक कुल k -वर्चस्व एनपी-पूर्ण होने के लिए जाना जाता है। हम इस परिणाम को यह साबित करके मजबूत करते हैं कि डिसाइड वैश्विक कुल k -डोमिनेशन द्विदलीय ग्राफ़, पूर्ण उन्मूलन द्विदलीय ग्राफ़, स्टार-उत्तल द्विदलीय ग्राफ़, कॉर्डल ग्राफ़ और डबल कॉर्डल ग्राफ़ के लिए एनपी-पूर्ण है। हम कॉर्डल द्विदलीय ग्राफ़ में न्यूनतम कार्डिनैलिटी ग्लोबल टोटल k -डोमिनेटिंग सेट प्राप्त करने के लिए एक बहुपद समय एल्गोरिथम का प्रस्ताव करते हैं। हम न्यूनतम वैश्विक कुल k -वर्चस्व के लिए एक $2(1 + \ln n)$ - सन्निकटन अल्गोरिथम डिज़ाइन करते हैं। इसके अलावा, हम यह साबित करते हैं कि किसी भी G के लिए न्यूनतम वैश्विक कुल k -प्रभुत्व का अनुमान लगाना कठिन है किसी भी $\epsilon > 0$ के लिए $(1 - \epsilon) \ln n$ के कारक के भीतर अनुमानित करना कठिन है जब तक कि $P=NP$ न हो। साथ ही, हम दिखाते हैं कि न्यूनतम वैश्विक कुल k -डोमिनेशन एक स्थिर कारक सन्निकटन एल्गोरिथम को स्वीकार करता है। तब हम सिद्ध करते हैं कि न्यूनतम वैश्विक कुल k -प्रभुत्व बद्ध डिग्री द्विदलीय ग्राफ़ के साथ-साथ कॉर्डल ग्राफ़ के लिए APX-पूर्ण है। अंत में, हम दिखाते हैं कि द्विदलीय ग्राफ़ के लिए और कॉर्डल ग्राफ़ के लिए डिसाइड वैश्विक कुल k -डोमिनेशन $W[2]$ -हार्ड है जब G में जीटीकेडी-सेट के आकार द्वारा पैरामीटर किया जाता है।

ग्राफ $G=(V,E)$ का एक उपसमुच्चय $D \subseteq V$ एक विभेदक-कुल कहलाता है यदि (i) D ग्राफ G का टोटल डोमिनेटिंग सेट है, (b) $N[u] \cap D \neq N[v] \cap D$, प्रत्येक विशिष्ट जोड़ी के लिए $u, v \in V$ । मिनीमम डिफरेंशियटिंग-टोटल डोमिनेशन एक न्यूनतम कारडाइनैलिटी का डिफरेंशियटिंग-टोटल डोमिनेटिंग सेट (डीटीडी-सेट) है और डिसाइड डिफरेंशियटिंग-टोटल डोमिनेशन मिनीमम डिफरेंशियटिंग-टोटल डोमिनेशन का निर्णय संस्करण है। हम विभेदक-कुल वर्चस्व की एल्गोरिथमिक जटिलता आरंभ करते हैं। हम दिखाते हैं कि डिसाइड डिफरेंशियटिंग-टोटल डोमिनेशन कॉर्डल बिपरटाइटे ग्राफ, स्टार-उत्तल द्विदलीय ग्राफ, कॉर्डल ग्राफ और प्लानर ग्राफ के लिए एनपी-पूर्ण है। हम किसी भी ग्राफ G के लिए सन्निकटन कारक $O(\ln \Delta(G))$ के साथ न्यूनतम विभेदक-कुल प्रभुत्व के लिए एक सन्निकटन एल्गोरिथम का प्रस्ताव करते हैं, अधिकतम डिग्री $G = \Delta(G)$ के साथ। इसके अलावा, हम साबित करते हैं कि किसी भी द्विदलीय ग्राफ के लिए न्यूनतम विभेदक-कुल प्रभुत्व का अनुमान लगाना कठिन है किसी भी $\epsilon > 0$ के लिए $(1 - \epsilon) \ln n$ का एक गुणनखंड जब तक कि $P=NP$ न हो। अंत में, हम दिखाते हैं कि न्यूनतम विभेदक-कुल प्रभुत्व APX-पूर्ण है बाउंड डिग्री द्विदलीय रेखांकन के लिए।

एक फलना $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ को G का वैश्विक रोमन प्रभुत्व फलन कहा जाता है, यदि भार 0 का प्रत्येक शीर्ष भार 2 के शीर्ष के साथ आसन्न हो साथ-साथ आसन्न न हो। फंक्शन भार को इस प्रकार परिभाषित किया गया है $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$ और वैश्विक रोमन प्रभुत्व फलन का न्यूनतम वजन वैश्विक रोमन डोमिनेशन संख्या के रूप में जाना जाता है। मिनीमम वैश्विक रोमन डोमिनेशन एक न्यूनतम भार वैश्विक रोमन डोमिनेटिंग फलन और डिसाइड वैश्विक रोमन डोमिनेशन मिनीमम वैश्विक रोमन डोमिनेशन का निर्णय संस्करण है। हम वैश्विक रोमन वर्चस्व की अलगोरिथमिक जटिलता की शुरुआत करते हैं। हम साबित करते हैं कि डिसाइड वैश्विक रोमन प्रभुत्व द्विदलीय रेखांकन, कॉर्डल द्विदलीय रेखांकन, तलीय द्विदलीय रेखांकन, तारा-उत्तल द्विदलीय रेखांकन, और कॉर्डल रेखांकन के लिए एनपी-पूर्ण है। सकारात्मक पक्ष पर, हम दिखाते हैं कि न्यूनतम वैश्विक रोमन प्रभुत्व श्रृंखला ग्राफ और श्रेयोल्ड ग्राफ के लिए बहुपद-समय में हल करने योग्य है। हम न्यूनतम वैश्विक रोमन प्रभुत्व के लिए एक $4(1 + \ln n)$ -सन्निकटन एल्गोरिथम डिज़ाइन करते हैं। इसके अलावा, हम साबित करते हैं कि न्यूनतम वैश्विक रोमन प्रभुत्व का अनुमान लगाना कठिन है किसी भी $\epsilon > 0$ के लिए $(1 - \epsilon) \ln n$ का एक गुणनखंड जब तक कि $P=NP$ न हो। हम दिखाते हैं कि वही अप्राप्यता परिणाम द्विदलीय रेखांकन के लिए भी धारण करता है। अंत में, हम दिखाते हैं कि न्यूनतम वैश्विक रोमन प्रभुत्व किसी भी द्विदलीय ग्राफ के लिए एक $O(\ln \Delta(G))$ सन्निकटन एल्गोरिथम स्वीकार करता है, अधिकतम डिग्री $G = \Delta(G)$ के साथ। तब हम साबित करते हैं कि न्यूनतम वैश्विक रोमन प्रभुत्व एपीएक्स-पूर्ण है जो सीमित डिग्री के लिए है ग्राफ के साथ-साथ बाउंड डिग्री द्विदलीय ग्राफ के लिए।

एक फलन $f : V \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ को रोमन $\{3\}$ -प्रभुत्व फलन इस प्रकार कहा जाता है कि प्रत्येक शीर्ष v के लिए यदि $f(v) \in \{0,1\}$, तो $\sum_{u \in N(v)} f(u) \geq 3$. एक फलन के भार को $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$ के रूप में परिभाषित किया गया है और रोमन $\{3\}$ -प्रभुत्व फलन का न्यूनतम वजन रोमन $\{3\}$ -डोमिनेशन संख्या के रूप में जाना जाता है। मिनीमम रोमन $\{3\}$ -डोमिनेशन एक न्यूनतम भार रोमन $\{3\}$ -डोमिनेटिंग फलन और डिसाइड रोमन $\{3\}$ -डोमिनेशन मिनीमम रोमन $\{3\}$ -डोमिनेशन का निर्णय संस्करण है। डीसाइड रोमन $\{3\}$ -डोमिनेशन द्विदलीय रेखांकन के लिए वर्चस्व को एनपी-पूर्ण माना जाता है। हम यह साबित करके इस परिणाम को मजबूत करते हैं कि डीसाइड रोमन $\{3\}$ -डोमिनेशन स्टार-उत्तल द्विदलीय ग्राफ़, कॉर्डल ग्राफ़ और स्प्लिट ग्राफ़ के लिए एनपी-पूर्ण है। हम न्यूनतम रोमन $\{3\}$ -डोमिनेशन को श्रृंखला ग्राफ़ और श्रेणिलु ग्राफ़ में हल करने के लिए रैखिक समय एल्गोरिदम का प्रस्ताव करते हैं। हम किसी भी ग्राफ G के लिए सन्निकटन कारक $O(\ln \Delta(G))$ के साथ न्यूनतम रोमन $\{3\}$ -डोमिनेशन के लिए एक सन्निकटन एल्गोरिथम का प्रस्ताव करते हैं, अधिकतम डिग्री $G = \Delta(G)$ के साथ। इसके अलावा, हम साबित करते हैं कि न्यूनतम रोमन $\{3\}$ -डोमिनेशन किसी भी ग्राफ के लिए किसी भी $\epsilon > 0$ के लिए $(1-\epsilon) \ln n$ के कारक के भीतर अनुमानित करना मुश्किल है जब तक कि $P=NP$ न हो। अंत में, हम दिखाते हैं कि न्यूनतम रोमन $\{3\}$ -डोमिनेशन एपीएक्स-पूर्ण है जो बाउंड डिग्री द्विदलीय ग्राफ के लिए है।

ग्राफ $G=(V,E)$ का एक उपसमुच्चय $D \subseteq V$ एक घात प्रबल समुच्चय (पावर डोमिनेटिंग सेट) कहलाता है यदि ग्राफ के प्रत्येक शीर्ष को निम्नलिखित दो प्रेक्षण नियमों पर विचार करके D द्वारा देखा जा सकता है:

OR1: यदि v उपसमुच्चय D में है, तो v स्वयं को और अपने सभी पड़ोसियों को देख सकता है।

OR2: पहले से देखे गए शीर्ष के लिए जिसके एक को छोड़कर सभी पड़ोसियों को देखा जाता है, तो एकमात्र अनदेखा पड़ोसी भी मनाया जाता है।

एक ग्राफ $G=(V,E)$ का एक उपसमुच्चय $D \subseteq V$ एक कनेक्टेड पावर डोमिनेटिंग सेट कहलाता है यदि D एक पावर डोमिनेटिंग सेट है और $G[D]$ प्रेरित सबग्राफ में जुड़ा हुआ है। न्यूनतम कनेक्टेड पावर डोमिनेशन G का न्यूनतम कार्डिनैलिटी कनेक्टेड पावर डोमिनेटिंग सेट खोजने के लिए और डिसाइड कनेक्टेड पावर डोमिनेशन न्यूनतम कनेक्टेड पावर डोमिनेशन का निर्णय संस्करण है। डिसाइड कनेक्टेड पावर डोमिनेशन सामान्य ग्राफ के लिए एनपी-पूर्ण होने के लिए जाना जाता है। हम यह साबित करके इस परिणाम को मजबूत करते हैं कि डिसाइड कनेक्टेड पावर डोमिनेशन पूर्ण उन्मूलन द्विदलीय ग्राफ़, स्टार-उत्तल द्विदलीय ग्राफ़ और स्प्लिट ग्राफ़ के लिए एनपी-पूर्ण है। सकारात्मक पक्ष पर, हम दिखाते हैं कि चेन ग्राफ और श्रेणिलु ग्राफ के लिए बहुपद समय में न्यूनतम कनेक्टेड पावर डोमिनेशन को हल किया जा सकता है। हम यह भी साबित करते हैं कि, द्विदलीय ग्राफ के लिए और कॉर्डल ग्राफ के लिए, न्यूनतम कनेक्टेड पावर डोमिनेशन किसी भी $\epsilon > 0$ के लिए $(1-\epsilon) \ln n$ के अनुपात में अनुमानित करना मुश्किल है जब तक कि $P=NP$ न हो। अंत में, हम दिखाते हैं कि न्यूनतम कनेक्टेड पावर डोमिनेशन एपीएक्स-हार्ड है जो अधिकतम डिग्री 5 वाले ग्राफ के लिए है।

Contents

Certificate	i
Acknowledgements	ii
Abstract	iv
List of Figures	xvii
List of Symbols	xxi
1 Introduction	1
1.1 Introduction	1
1.2 Variations of Domination Studied in the Thesis	2
1.2.1 Global Total k -Domination	3
1.2.2 Differentiating-Total Domination	4
1.2.3 Global Roman Domination	6
1.2.4 Roman $\{3\}$ -Domination	8
1.2.5 Connected Power Domination	10
1.3 Preliminaries	12
1.3.1 Graph-theoretic Definitions and Notations	12
1.3.2 Algorithmic Preliminaries	13
1.4 Some Important Decision and Optimization Problems	16
1.5 Graph Classes	22
1.5.1 Bipartite graphs	22
1.5.2 Chordal graphs	24

1.5.3	Planar graphs	28
1.6	Contribution of the Thesis	29
1.7	Organization of the Thesis	32
2	Global Total k-Domination	35
2.1	Introduction	35
2.2	Complexity Difference Between Domination and Global Total k -Domination	36
2.3	NP-completeness Results	39
2.3.1	NP-completeness Proof for Perfect Elimination Bipartite Graphs	39
2.3.2	NP-completeness Proof for Star-convex Bipartite Graphs . . .	44
2.3.3	NP-completeness Proof for Chordal Graphs	48
2.3.4	NP-completeness Proof for Doubly Chordal Graphs	51
2.4	Algorithm for Chordal Bipartite Graphs	53
2.5	Approximation Algorithm	55
2.5.1	Approximation Algorithm for General Graphs	56
2.5.2	Approximation Algorithm for Bounded Degree Graphs	60
2.6	Lower Bound on Approximation Ratio	61
2.6.1	Result for General Graphs	61
2.6.2	Result for Bipartite Graphs	67
2.6.3	Result for Chordal Graphs	74
2.7	APX-completeness for Bounded Degree Graphs	82
2.7.1	APX-completeness for Graphs with Maximum Degree $k + 3$. .	82
2.7.2	APX-completeness for Bipartite Graphs with Maximum Degree $k + 3$	87
2.8	Parameterized Complexity	91
2.8.1	Result for Bipartite Graphs	91
2.8.2	Result for Chordal Graphs	92
3	Differentiating-Total Domination	95
3.1	Introduction	95

3.2	Complexity Difference of Differentiating-Total Domination with Variants of Domination	96
3.2.1	Complexity Difference Between Total Domination and Differentiating-Total Domination	96
3.2.2	Complexity Difference with Locating-Total Domination and Open Neighborhood Locating-Domination	99
3.3	NP-completeness Results	102
3.3.1	NP-completeness Proof for Chordal Graphs	103
3.3.2	NP-completeness Proof for Chordal Bipartite Graphs	105
3.3.3	NP-completeness Proof for Star-convex Bipartite Graphs	107
3.4	Approximation Algorithm	109
3.5	Lower Bound on Approximation Ratio	111
3.6	APX-completeness for Graphs with Maximum Degree 3	116
4	Global Roman Domination	119
4.1	Introduction	119
4.2	Complexity Difference Between Global Domination and Global Roman Domination	120
4.3	NP-completeness Results	127
4.3.1	NP-completeness Proof for Bipartite Graphs	127
4.3.2	NP-completeness Proof for Chordal Bipartite Graphs	129
4.3.3	NP-completeness Proof for Star-convex Bipartite Graphs	132
4.3.4	NP-completeness Proof for Chordal Graphs	135
4.4	Algorithm for Chain Graphs	137
4.5	Algorithm for Threshold Graphs	138
4.6	Approximation Algorithm	139
4.6.1	Approximation Algorithm for Graphs	140
4.6.2	Approximation Algorithm for Bounded Degree Graphs	144
4.6.3	Approximation Algorithm for Bounded Degree Bipartite Graphs	145

4.7	Lower Bound on Approximation Ratio	149
4.7.1	Result for General Graphs	149
4.7.2	Result for Bipartite Graphs	152
4.8	APX-completeness for Bounded Degree Graphs	156
4.8.1	APX-completeness for Graphs with Maximum Degree 12	156
4.8.2	APX-completeness for Bipartite Graphs with Maximum degree 9160	156
5	Roman {3}-Domination	163
5.1	Introduction	163
5.2	Complexity Difference Between Roman {3}-Domination and Total Roman {3}-Domination	164
5.3	NP-completeness Results	171
5.3.1	NP-completeness Proof for Chordal Graphs	171
5.3.2	NP-completeness Proof for Split Graphs	174
5.3.3	NP-completeness Proof for Star-convex Bipartite Graphs	179
5.4	Algorithms for Chain Graphs	184
5.5	Algorithm for Threshold Graphs	186
5.6	Approximation Algorithm	187
5.7	Lower Bound on Approximation Ratio	188
5.8	APX-completeness for Bipartite Graphs with Maximum Degree 7	195
6	Connected Power Domination	200
6.1	Introduction	200
6.2	Complexity Difference of Connected Power Domination with some Variants of Domination	201
6.2.1	Complexity Difference Between Domination, Power Domination and Connected Power Domination	202
6.2.2	Complexity Difference Between Connected Domination and Connected Power Domination	211
6.3	NP-completeness Results	217

6.3.1	NP-completeness Proof for Perfect Elimination Bipartite Graphs	217
6.3.2	NP-completeness Proof for Star-convex Bipartite Graphs . . .	220
6.3.3	NP-completeness Proof for Split Graphs	222
6.4	Algorithm for Chain Graphs	225
6.5	Algorithm for Threshold Graphs	228
6.6	Lower Bound on Approximation Ratio	229
6.6.1	Result for Bipartite Graphs	229
6.6.2	Result for Chordal Graphs	233
6.7	APX-hardness for Graphs with Maximum Degree 5	237
7	Conclusion and Future Research	240
7.1	Contributions	240
7.2	Open Problems	242
	Bibliography	244
	Bio-Data	251

List of Figures

1.1	Graph G	4
1.2	Graph G	5
1.3	Graph G	7
1.4	Graph G	9
1.5	A graph G	11
1.6	A chain graph.	23
1.7	A perfect elimination bipartite graph.	24
1.8	A tree-convex bipartite graph.	25
1.9	The inclusive relationship among different subclasses of bipartite graphs.	25
1.10	A chordal graph.	26
1.11	A threshold graph.	27
1.12	A doubly chordal graph.	28
1.13	The inclusive relationship among some classes of graphs studied in this thesis.	29
2.1	An example of $GC2$ -graph G from a connected graph H	37
2.2	An illustration of the construction of perfect elimination bipartite graph H from a bipartite graph G in the proof of Theorem 2.3.1.	40
2.3	An illustration of the construction of perfect elimination bipartite graph H from a bipartite graph G in the proof of Theorem 2.3.4.	43

2.4	An illustration of the construction of star-convex bipartite graph G from a set system (U, \mathcal{C})	45
2.5	An illustration of the construction of chordal graph H from a chordal graph G in the proof of Theorem 2.3.13.	49
2.6	An illustration of the construction of doubly chordal graph H from a doubly chordal graph G in the proof of Theorem 2.3.17.	52
2.7	An illustration of the construction of H from G in the proof of Theorem 2.6.2.	64
2.8	An illustration of the construction of bipartite graph H from a bipartite graph G in the proof of Theorem 2.6.5.	68
2.9	An illustration of the construction of bipartite graph G from set system $(\mathcal{U}, \mathcal{C})$ in the proof of Theorem 2.6.7.	71
2.10	An illustration of the construction of chordal graph G from set system $(\mathcal{U}, \mathcal{C})$ in the proof of Theorem 2.6.9.	75
2.11	An illustration of the construction of chordal graph H from a chordal graph G in the proof of Theorem 2.6.11.	79
2.12	An illustration of the construction of H from G in the proof of Theorem 2.7.2.	83
3.1	An example of $GP4$ -graph G from a general graph H	97
3.2	Illustration of the construction of a graph of the family \mathcal{G} from a set system (X, \mathcal{C})	100
3.3	An illustration of the construction of chordal graph H from G in the proof of Theorem 3.3.1	104
3.4	An illustration of the construction of chordal bipartite graph G' from a chordal bipartite graph G in the proof of Theorem 3.3.3	105
3.5	An illustration of the construction of star-convex bipartite graph H from a bipartite graph G in the proof of Theorem 3.3.7	108

3.6	An illustration of the construction of bipartite graph H from a bipartite graph G in the proof of Theorem 3.5.1	112
3.7	An illustration of the construction of a bipartite graph H from a graph G in the proof of Theorem 3.6.1	117
4.1	An example of the family $\mathcal{F}_G^{\mathcal{R}}$	121
4.2	An example of the family \mathcal{F}_{GD}	125
4.3	An illustration of the construction of bipartite graph G from system (X, \mathcal{C}) in the proof of Theorem 4.3.1.	128
4.4	An illustration of the construction of chordal bipartite graph H from a chordal bipartite graph G in the proof of Theorem 4.3.5.	130
4.5	An illustration of the construction of star-convex bipartite graph G from system (X, \mathcal{C}) in the proof of Theorem 4.3.8.	134
4.6	An illustration of the construction of chordal graph G from system (X, \mathcal{C}) in the proof of Theorem 4.3.10.	136
4.7	An illustration of the construction of G from the system (U, \mathcal{C}) in the proof of Theorem 4.7.1.	150
4.8	An illustration of the construction of bipartite graph H from a bipartite graph G in the proof of Theorem 4.7.3.	154
4.9	An illustration of the construction of H from graph G in the proof of Theorem 4.8.2.	158
4.10	An illustration of the construction of bipartite graph H from graph G in the proof of Theorem 4.8.5.	161
5.1	An example of the family $\mathcal{F}_{\mathcal{R}3}^{\mathcal{T}}$	165
5.2	An example of the family $\mathcal{F}_{\mathcal{R}3}$	168
5.3	An illustration of the construction of chordal graph G from system (X, \mathcal{C}) in the proof of Theorem 5.3.1.	173

5.4	An illustration of the construction of split graph H from G in the proof of Theorem 5.3.3.	175
5.5	An illustration of the construction of star-convex bipartite graph G from system (X, \mathcal{C}) in the proof of Theorem 5.3.5.	180
5.6	An illustration of the construction of H from G in the proof of Theorem 5.7.1.	190
5.7	An illustration of the construction of H from G in the proof of Theorem 5.8.2.	197
6.1	An example graph of the family $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$	203
6.2	An example graph of the family $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$	206
6.3	An example graph of the family $\mathcal{F}_{\mathcal{CP}}$	209
6.4	An example graph of the family $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{P}}$	213
6.5	An illustration of the construction of perfect elimination bipartite graph G from system (X, \mathcal{C}) in the proof of Theorem 6.3.1.	218
6.6	An illustration of the construction of star-convex bipartite graph H from the graph G	221
6.7	An illustration of the construction of split graph G from system (X, \mathcal{C}) in the proof of Theorem 6.3.5.	224
6.8	An illustration of the construction of bipartite graph G from system (U, \mathcal{C}) in the proof of Theorem 6.6.1.	230
6.9	An illustration of the construction of chordal graph G from system (U, \mathcal{C}) in the proof of Theorem 6.6.3.	234
6.10	An illustration of the construction of H from G in the proof of Theorem 6.7.1	238

List of Symbols

Symbol	Meaning
\mathbb{N}	Set of <i>natural numbers</i>
$\forall x$	For <i>all</i> x
$x \in X$	x is a <i>member</i> of X
$A \subseteq X$	A is a <i>subset</i> of X
$ X $	The <i>cardinality</i> of a set X
$A \cap B$	The <i>intersection</i> of A and B
$A \cup B$	The <i>union</i> of A and B
$A \setminus B$	The <i>set difference</i> of A and B
$A \times B$	The <i>Cartesian product</i> of A and B
\emptyset	The <i>empty</i> set
\square	The <i>end of a proof</i>
	such that
$E(G)$	The set of <i>edges</i> of G
$V(G)$	The set of <i>vertices</i> of G
$d(v)$ or $d_G(v)$	The <i>degree</i> of the vertex v
Δ or $\Delta(G)$	The <i>maximum degree</i> in G
δ or $\delta(G)$	The <i>minimum degree</i> in G

$N(v)$ or $N_G(v)$	<i>neighborhood</i> of v in G
$N[v]$ or $N_G[v]$	<i>closed neighborhood</i> of v in G
$G[D]$	The subgraph of G <i>induced</i> by the vertices of D
$G = (X, Y, E)$	The <i>bipartite graph</i> G with vertex set $X \cup Y$
\overline{G}	The <i>complement</i> of an undirected graph G
K_n	The <i>complete graph</i> on n vertices
C_n	The <i>cycle</i> on n vertices
P_n	The <i>path</i> on n vertices
$K_{m,n}$	The <i>complete bipartite graph</i> on $m + n$ vertices partitioned into an m -independent set and an n -independent set
$\gamma(G)$	The <i>domination number</i> of G
$\gamma_t(G)$	The <i>total domination number</i> of G
$\gamma_{kt}(G)$	The <i>total k-domination number</i> of G
$\gamma_t^g(G)$	The <i>global total domination number</i> of G
$\gamma_{kt}^g(G)$	The <i>global total k-domination number</i> of G
$\gamma_{dt}(G)$	The <i>differentiating-total domination number</i> of G
$\gamma_R(G)$	The <i>Roman domination number</i> of G
$\gamma_g(G)$	The <i>global domination number</i> of G
$\gamma_{gR}(G)$	The <i>global Roman domination number</i> of G
$\gamma_{R3}(G)$	The <i>Roman $\{3\}$-domination number</i> of G
$\gamma_{R3}^T(G)$	The <i>Total Roman $\{3\}$-domination number</i> of G
$\gamma_c(G)$	The <i>connected domination number</i> of G
$\gamma_p(G)$	The <i>power domination number</i> of G
$\gamma_{P,c}(G)$	The <i>connected power domination number</i> of G
P	The class of <i>deterministic</i> polynomial-time solvable problems

NP	The class of <i>nondeterministic</i> polynomial-time solvable problems
APX	The class of <i>polynomial-time constant approximable</i> problems