SOME RESULTS ON FRACTAL FUNCTIONS, FRACTAL DIMENSIONS, AND FRACTIONAL CALCULUS

SAURABH VERMA

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI
OCTOBER 2020

SOME RESULTS ON FRACTAL FUNCTIONS, FRACTAL DIMENSIONS, AND FRACTIONAL CALCULUS

by

SAURABH VERMA

Department of Mathematics

Submitted

in fulfillment of the requirements of the degree of Doctor of Philosophy

to the

Indian Institute of Technology Delhi

October 2020

Dedicated to

My Brother "Shubham Kumar Verma"

Certificate

This is to certify that the thesis entitled **Some Results on Fractal Functions, Fractal Dimensions, and Fractional Calculus** submitted by **Mr. Saurabh Verma** to the **Indian Institute of Technology Delhi**, for the award of the Degree of **Doctor of Philosophy**, is a record of the original bona fide research work carried out by him under our guidance and supervision. The thesis has reached the standards fulfilling the requirements of the regulations relating to the degree.

The results contained in this thesis have not been submitted in part or full to any other university or institute for the award of any degree or diploma.

October 2020
New Delhi

Dr. P. Viswanathan
Assistant Professor
Department of Mathematics
IIT Delhi, New Delhi

Acknowledgements

I gladly take this opportunity to acknowledge the people who have helped and supported me throughout my Ph.D. course. First and foremost, I want to express my heartfelt gratitude to my doctoral supervisor, Dr. P. Viswanathan, for his continuous support and guidance throughout the Ph.D. course. I thank him for his patience in guiding me, and for his valuable suggestions. He has always made himself available whenever there is a need for discussion, and he had been lenient in a way which allowed me to have ample time to do my research work. He has always given me the opportunity to do independent research work and to explore Mathematics, yet simultaneously, he was there to teach and correct me whenever needed. I always felt supported and encouraged by him, and I am grateful for having had the opportunity to work with him.

I greatly appreciate the support of Prof. A. Priyadarshi and Prof. N. Shravan Kumar for the valuable suggestions that they have contributed. I consider myself fortunate to have had the opportunity to discuss mathematical concepts with them.

I would specially like to thank the teachers of Analysis in my M.Sc. programme, Prof. S. Sampath and Prof. S. Kundu, for introducing the subject in a very passionate way. Their teachings inspired me to pursue higher studies, and these teachings have also proved to be very useful during the course of my research work.

I would like to extend my appreciation to the members of my SRC (Student

Research Committee), Prof. A. Priyadarshi, Prof. K. Sreenadh, and Prof. S. K. Mohammed as well as to the faculty members of the Department of Mathematics, IIT Delhi. The Department of Mathematics, IIT Delhi has provided me with the necessary support and facilities, which made it possible for me to complete my thesis. I thank IIT Delhi for also providing financial support to attend the international conference "FGS6" held in Germany. I must also thank the funding agency, UGC India, for providing the financial support required to complete my thesis work, in the form of research fellowship.

I would not have been able to reach this level of accomplishment without the support of countless people over the past four years. I have been blessed with many supportive friends that it is impossible to thank each one of them here individually, but I want to remind them that the happy memories of my friendship with them will always remain sparkled in my heart. I would like to thank Abhay, Abhilash, Rattan, Manoj, Kshitij and Vishvesh from my department. I would also like to thank my seniors, batchmates, juniors and hostel mates for their suggestions and for the companionship they gave. My special and heartfelt gratitude goes to my friends who have always been a major source of support when things would get a bit discouraging: Abhishek, Ashish, Divakar, Krishna, Vaibhav, Marbarisha and Vishal. Thank you, guys, for always being there for me.

Last, but not least, I would like to dedicate this thesis to my brother, Shubham Kumar Verma, who has willingly sacrificed his dreams, career and comfort for the sake of my studies. I want to express my sincere gratitude to my parents, sisters, brother and sister-in-law for their love, patience and understanding, and for believing in me.

New Delhi Saurabh Verma
October, 2020

Abstract

Interpolation, by polynomials and other smooth functions, is a rather old method in applied mathematics. The notion of Fractal Interpolation Function (FIF) provides a relatively new method of interpolation that can produce both smooth and nonsmooth interpolants. Over the past three decades, the subject of fractal interpolation has been one of the major research themes among fractal community. As is well known, by their very nature, theories of interpolation and approximation are intimately related. However, the interplay between these two theories is more subtle in the fractal setting. In the context of fractal interpolation, the notion of α-fractal function is mostly responsible for the interesting research findings on the interconnection between interpolation and approximation theories of univariate fractal functions. This thesis makes some modest contributions towards approximation theoretic aspects of univariate and bivariate fractal functions using α-fractal function as an effective tool. Fractal dimensions being important approximation theoretic indices, effort has been made to study the box dimension and Hausdorff dimension of graphs of these univariate and bivariate fractal functions. The focus of interest shifts slightly in the last part of the thesis wherein we attempt to relate the two fields- Fractional Calculus and Fractal Geometry - with fractal dimension as a medium. Thus, in broad terms, the subject of the thesis pertains to three "F-concepts" -Fractal interpolation functions, Fractal dimension, and Fractional calculus.

Chapter 1, being the introduction, provides an overview of the basic theory and the results relevant to our study in the subsequent chapters. This chapter is interspersed with a brief literature survey on the topics that concern us.

In Chapter 2, we revisit the univariate α-fractal function and associated fractal operator that received a great deal of attention in the literature on approximation theory of univariate FIF. In particular, we show that the α-fractal function depends continuously on the parameters involved in its construction. Furthermore, we clarify and correct the mathematical errors in some results on α-fractal function and Bernstein α-fractal function which appeared recently in the literature. Therefore, Chapter 2 can be viewed as an attempt to build on the extant literature pertaining to the univariate α-fractal functions.

With the intend to open the door towards the interaction of bivariate fractal functions (fractal surfaces) with the field of constrained approximation, we introduce the bivariate analogue of α-fractal function in Chapter 3. Furthermore, some elementary properties of the bivariate α-fractal function and associated fractal operator are established.

The purpose of Chapter 4 is to initiate the study of constrained approximation aspects of the bivariate α-fractal functions. To reach this goal, we adapt a two-step strategy. The first step is to identify suitable values of the parameters so that the bivariate α-fractal function corresponding to a given function preserves certain properties of the original. The second step is to apply the constrained approximation results available with classical bivariate functions in conjunction with the parameters identification results culminated in the first step.

In Chapter 5, we intend to consider the estimation of fractal dimensions of the graphs of univariate and bivariate α-fractal functions that appeared in the previous chapters. In the last part of this chapter, we make a slight digression to study the connection between the notion of bounded variation of a bivariate function and the fractal dimension of its graph. In addition to forming a prelude to the next chapter, these results may be of independent interest.

In chapter 6, an effort has been made to relate fractal geometry and fractional calculus that are developing independently and in parallel. Particular emphasis is given to fractal dimensions of the graphs of the Katugampola fractional integrals - a new notion of fractional integral that generalizes both the Riemann-Liouville and Hadamard fractional integrals- the two competing forms of fractional integrals that have been studied extensively for their applications.

::::::::::::::::::::

सार

बहुपद और अन्य स्मूद फ़ंक्शंस द्वारा इंटरपोलेशन, लागू गणित में एक पुरानी पद्धति है। फ्रैक्टल इंटरपोलेशन फंक्शन (एफआईएफ) की धारणा इंटरपोलेशन की एक अपेक्षाकृत नई विधि प्रदान करती है जो स्मूद और गैर-स्मूद इंटरपोलेंट दोनों का उत्पादन कर सकती है। पिछले तीन दशकों में, फ्रैक्टल इंटरपोलेशन का विषय फ्रैक्टल समुदाय के बीच प्रमुख शोध विषयों में से एक रहा है। जैसा कि सर्वविदित है, उनके स्वभाव से, इंटरपोलेशन और एप्रोक्सीमेशन के सिद्धांत अंतरंग रूप से संबंधित हैं। हालांकि, इन दोनों सिद्धांतों के बीच का अंतर फ्रैक्टल सेटिंग में अधिक सूक्ष्म है। फ्रैक्टल इंटरपोलेशन के संदर्भ में, अल्फा -फ्रैक्टल फ़ंक्शन की धारणा ज्यादातर इंटरफेरनेशन और एकचर फ्रैक्टल फ़ंक्शंस के एप्रोक्सीमेशन सिद्धांतों के बीच इंटरकनेक्शन पर दिलचस्प शोध निष्कर्षों के लिए जिम्मेदार है। यह थीसिस एक प्रभावी उपकरण के रूप में अल्फा -फ्रैक्टल फ़ंक्शन का उपयोग करते हुए एकचर और द्विचर फ्रैक्टल फ़ंक्शन के एप्रोक्सीमेशन सिद्धांत के प्रति कुछ मामूली योगदान देता है। फ्रैक्टल डाइमेंशन महत्वपूर्ण एप्रोक्सीमेशन थ्योरिटिक इंडेक्स हैं, इन एकचर और द्विचर फ्रैक्टल फ़ंक्शंस के ग्राफ के बॉक्स डाइमेंशन और हॉसडॉर्फ डाइमेंशन का अध्ययन करने का प्रयास किया गया है। रुचि का ध्यान इस थीसिस के अंतिम भाग में थोड़ा बदल जाता है जिसमें हम दो क्षेत्रों- फ्रैक्शनल कैलकुलस और फ्रैक्टल ज्योमेट्री से संबंधित करने का प्रयास करते हैं - एक माध्यम के रूप में फ्रैक्टल डाइमेंशन के साथ। इस प्रकार, व्यापक शब्दों में, थीसिस का विषय तीन `` एफ-अवधारणाओं " से संबंधित है- फ्रैक्टल इंटरपोलेशन फंक्शन, फ्रैक्टल डाइमेंशन और फ्रैक्शनल कैलकुलस।

अध्याय 1, परिचय होने के नाते, मूल सिद्धांत और बाद के अध्यायों में हमारे अध्ययन के लिए प्रासंगिक परिणामों का अवलोकन प्रदान करता है। यह अध्याय उन विषयों पर एक संक्षिप्त साहित्य सर्वेक्षण के साथ जुड़ा हुआ है जो हमें चिंतित करते हैं।

अध्याय 2 में, हम एकचर अल्फा-फ्रैक्टल फ़ंक्शन और संबंधित फ्रैक्टल ऑपरेटर को फिर से दिखाते हैं, जो कि साहित्यिक एफआईएफ के एप्रोक्सीमेशन सिद्धांत पर साहित्य में बहुत अधिक ध्यान आकर्षित करते हैं। विशेष रूप से, हम दिखाते हैं कि अल्फा-फ्रैक्टल फ़ंक्शन इसके निर्माण में शामिल मापदंडों पर लगातार निर्भर करता है। इसके अलावा, हम अल्फा-फ्रैक्टल फ़ंक्शन और बर्नस्टीन अल्फा-फ्रैक्टल फ़ंक्शन पर कुछ परिणामों में गणितीय त्रुटियों को स्पष्ट और सही करते हैं जो हाल ही में साहित्य में दिखाई दिए थे। इसलिए, अध्याय 2 को विलुप्त होने वाले अल्फा-फ्रैक्टल फ़ंक्शंस से संबंधित प्रचलित साहित्य पर बनाने के प्रयास के रूप में देखा जा सकता है।

विवश एप्रोक्सीमेशन के क्षेत्र के साथ द्विचर फ्रैक्टल फ़ंक्शंस (फ्रैक्टल सतहों) की बातचीत की ओर दरवाजा खोलने का इरादा के साथ, हम अध्याय 3 में अल्फा-फ्रैक्टल फ़ंक्शन के द्विचर एनालॉग को पेश करते हैं।

इसके अलावा, द्विचर अल्फा-फ्रैक्टल फ़ंक्शन और संबद्ध फ्रैक्टल ऑपरेटर के कुछ प्राथमिक गुण स्थापित हैं।

अध्याय 4 का उद्देश्य द्विचर अल्फा-फ्रैक्टल फ़ंक्शंस के विवश एप्रोक्सीमेशन पहलुओं के अध्ययन की शुरुआत करना है। इस लक्ष्य तक पहुंचने के लिए, हम दो-चरणीय रणनीति को अपनाते हैं। पहला कदम मापदंडों के उपयुक्त मूल्यों की पहचान करना है ताकि किसी दिए गए फ़ंक्शन के अनुरूप द्विचर अल्फा-फ्रैक्टल फ़ंक्शन मूल के कुछ गुणों को संरक्षित करता है। दूसरा कदम है, पहले चरण में समाप्त किए गए मापदंडों की पहचान परिणामों के साथ संयोजन में शास्त्रीय बाइवेरेट कार्यों के साथ उपलब्ध विवश एप्रोक्सीमेशन परिणामों को लागू करना।

अध्याय 5 में, हम पिछले अध्यायों में दिखाई देने वाले एकचर और द्विचर अल्फा-फ्रैक्टल फ़ंक्शन के ग्राफ़ के फ्रैक्टल डाइमेंशन के आकलन पर विचार करना चाहते हैं। इस अध्याय के अंतिम भाग में, हम एक द्विचर फ़ंक्शन की बाध्यता की धारणा और उसके ग्राफ के फ्रैक्टल डाइमेंशन के बीच संबंध का अध्ययन करने के लिए एक मामूली विषयांतर करते हैं। अगले अध्याय में प्रस्तावना बनाने के अलावा, ये परिणाम स्वतंत्र हित के हो सकते हैं।

अध्याय 6 में, फ्रैक्टल ज्योमेट्री और फ्रैक्शनल कैलकुलस से संबंधित एक प्रयास किया गया है जो स्वतंत्र रूप से और समानांतर में विकसित हो रहा है। विशेष रूप से कटुगम्पोला फ्रैक्शनल इंटीग्रल के ग्राफ़ के फ्रैक्टल डाइमेंशन के लिए विशेष जोर दिया जाता है - एक नई धारणा - फ्रैक्शनल इंटीग्रल जो

कि रीमैन-लिउविले और हैडमार्ड दोनों फ्रैक्शनल इंटीग्रल्स को सामान्य बनाती है- उनके अनुप्रयोगों के लिए बड़े पैमाने पर अध्ययन किया गया है।

::::::::::::::::::::

Contents

List of Symbols

Symbol	Meaning
$\forall$	for all
$=$	equal to
$\neq$	not equal to
$\in$	belongs to
$\notin$	does not belong
$\subset$	subset or equal
$\cup$, $\cap$	union, intersection
$\lvert x \rvert$	absolute value of x
$\emptyset$	empty set

$\mathbb{N}$	the set of natural numbers
$\mathbb{Z}$	the set of integers
$\mathbb{Q}$	the set of rational numbers
$\mathbb{R}$	the real line
$\mathbb{C}$	the complex plane
$\mathcal{P}(X)$	the power set of a set X
$\mathcal{C}(X)$	the space of all real-valued continuous functions on X
$\mathcal{L}^p(X)$	the space of all real-valued p-integrable functions on X
$\lVert . \rVert$	norm
$\lVert . \rVert_\infty$	the uniform norm
f^n	n-fold composition $f \circ f \circ \cdots \circ f$
Id	Identity map
$\Box$	end of a proof