CONTRACTION BASED STABILIZATION AND TRACKING OF SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS

MADAN MOHAN RAYGURU

DEPARTMENT OF ELECTRICAL ENGINEERING
INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI
OCTOBER 2018

© Indian Institute of Technology Delhi (IITD), New Delhi, 2018

CONTRACTION BASED STABILIZATION AND TRACKING OF SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS

by

MADAN MOHAN RAYGURU
Department of Electrical Engineering

Submitted
in fulfillment of the requirements of the degree of **DOCTOR OF PHILOSOPHY**

to the

INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI
OCTOBER 2018

CERTIFICATE

This is to certify that the thesis entitled **Contraction Based Stabilization And Tracking Of Singularly Perturbed Systems** submitted by **Madan Mohan Rayguru** to the Indian Institute of Technology Delhi, for the award of the Degree of **Doctor of Philosophy**, is a record of the bona fide research work carried out by him under my supervision and guidance. The thesis has reached the standards fulfilling the requirements of the regulations relating to the degree.

The results contained in this thesis have not been submitted either in part or in full to any other University or Institute for the award of any degree or diploma to the best of my knowledge.

Prof. Indra Narayan Kar
Department of Electrical Engineering,
Indian Institute of Technology Delhi.
(Supervisor)

ACKNOWLEDGEMENTS

First of all, I commend the omnipotent for helping me with this opportunity and giving me the strength to continue successfully. The thesis proposal shows of in its current frame because of the assistance of few people. I want to offer my earnest to all of them.

I would like to express my deepest gratitude to my thesis supervisor, Prof. I. N. Kar for his valuable guidance, consistent encouragement and constructive criticism. I would be grateful to him for teaching me the importance of minute details which played very important role in shaping my research. I would also thank my SRC members for their valuable comments and feedback: Prof. S. Janardhanan, Prof. S. Sen, and Prof. S. Mukherjee. I would always be grateful to Prof. S. Bhasin for his technical acumen which helped me to understand the subtle concepts. I am thankful to Virender for helping me in various unofficial matters.

I am extremely indebted towards my wife Sruti for her tireless support and constant encouragement. I could not have accomplished this work without the help of my parents. I sincerely acknowledge Abhilash and Spandan for their fruitful discussions, which improved my understanding in many matters. I am grateful to my dear friends Sumit, Satnesh, Niraj, Venkat and all my colleagues for their support.

Madan Mohan Rayguru

ABSTRACT

The presence of small parameters in the mathematical model brings about a intriguing phenomenon called timescale separation in the system dynamics. The difference in timescale corresponds to a situation, where slow and fast evolving variables simultaneously determine the overall system behavior. This type of phenomenon is very common in the applications involving celestial mechanics, fluid dynamics, enzyme kinetics, aerospace, steered tank reactors, power systems, robotics etc, and hence, it is important to analyze its effect on the system behavior. Singular perturbation technique is one of the most effective methods to accurately model and analyze the timescale separation in physical systems. This technique has been utilized in solving various control problems like, high gain controller design, high gain observer design, stabilization of flexible robots, helicopter stabilization, approximate feedback linearization, stabilization of non-affine in input nonlinear systems, timescale redesign for input uncertain systems, stabilization of nonstandard singularly perturbed system (SPS), filtered backstepping controller design etc.

The above-mentioned control problems are solved using singular perturbation technique along with the conventional stability analysis tools and mostly the qualitative behavior of the trajectories could be investigated. This thesis intends to exploit the contraction theory tools for solving stabilization and tracking problems in different classes of SPS, such that the interdependencies between various parameters are analyzed in a straightforward manner. The work focuses on deriving the convergence bounds in terms of design parameters such that the tuning becomes easier and the arbitrary reduction in the magnitude of the perturbation parameter to achieve better performance can be avoided. The contributions of the thesis can be partitioned into four major parts.

- To show the advantage of quantitative analysis of SPS based on contraction theory, a case study is undertaken to analyze the performance of a controller based on high gain feedback technique. For this objective, the high gain feedback controller is chosen to be the filtered backstepping controller. The contraction theory based convergence analysis relaxes the conservative bounds on the design variables and proves that the steady state error bounds can be reduced without arbitrarily decreasing the singular perturbation parameter.

- A contraction theory based framework is proposed for solving state feedback stabilization and tracking problems in standard and nonstandard models of singularly perturbed systems and to quantify the convergence bounds. The use of contraction tools completely circumvents the need of interconnection conditions and guarantees convergence behavior

beyond a conservative range of perturbation parameter μ. The design procedure is also extended to nonstandard models and approximate feedback linearizable systems.

- As full state measurement is not possible in many practical cases, the work is extended to design a HGO based output feedback controllers in the framework of contraction theory without putting any conservative restriction on the slow manifold. The convergent dynamics concepts are exploited to assure ultimate boundedness of the closed loop trajectories and to exclude finite time escape phenomenon inherent in time scale designs. The analysis demonstrates the robustness of the output feedback scheme against variation in perturbation parameter and provide new ways to tune the threshold limit required for ultimate boundedness.

- This thesis also proposes a contraction theory based methodology to design saturated controller for systems, which are in feedback linearizable form. For this purpose, a novel high gain dynamic controller in conjunction with a standard HGO is used to generate a smooth saturated control input. The contraction theory based tools are helpful in proving the existence of a unique slow manifold and quantifying the performance of the controller with limited actuation power.

Overall, this thesis develops a contraction theory based quantitative framework for solving stabilization and tracking problems in singularly perturbed systems. The proposed methodologies not only provide an alternative to the conventional Lyapunov based techniques but also bring about certain new improvements on the recent contraction based approaches.

सार

गणितीय मॉडल में छोटे पैरामीटर की उपस्थिति प्रणाली की गतिशीलता में टाइम्सकेल अलगाव नामक एक दिलचस्प घटना को लाती है। टाइमकेल में अंतर एक परिस्थिति से मेल खाता है, जहां धीमी और तेजी से विकसित चर एक साथ समग्र सिस्टम व्यवहार निर्धारित करते हैं। खगोलीय यांत्रिकी, तरल गतिशीलता, एंजाइम कीनेटिक्स, एयरोस्पेस, स्टीयर टैंक रिएक्टर, पावर सिस्टम, रोबोटिक्स इत्यादि शामिल अनुप्रयोगों में इस प्रकार की घटना बहुत आम है, और इसलिए, सिस्टम व्यवहार पर इसके प्रभाव का विश्लेषण करना महत्वपूर्ण है। एकवचन परेशानी तकनीक भौतिक प्रणालियों में समय-समय पर पृथक्करण को सटीक रूप से मॉडल और विश्लेषण करने के सबसे प्रभावी तरीकों में से एक है। इस तकनीक का उपयोग विभिन्न नियंत्रण समस्याओं जैसे कि उच्च लाभ नियंत्रक डिजाइन, उच्च लाभ पर्यवेक्षक डिजाइन, लचीली रोबोटों का स्थिरीकरण, हेलीकॉप्टर स्थिरीकरण, अनुमानित फीडबैक रैखिकरण, इनपुट नॉनलाइनर सिस्टम में गैर-एफ़िन की स्थिरीकरण, इनपुट अनिश्चित प्रणालियों के लिए टाइमस्केल रीडिज़ाइन को हल करने में किया गया है। , गैर-मानक एकवचन रूप से परेशान प्रणाली (एसपीएस) का स्थिरीकरण, फ़िल्टर किए गए बैकस्टेपिंग नियंत्रक डिजाइन इत्यादि।

उपर्युक्त नियंत्रण समस्याओं को पारंपरिक स्थिरता विश्लेषण उपकरण के साथ एकवचन परेशानी तकनीक का उपयोग करके हल किया जाता है और ज्यादातर ट्रैजेक्टोरियों के गुणात्मक व्यवहार की जांच की जा सकती है। यह थीसिस एसपीएस के विभिन्न वर्गों में स्थिरीकरण और ट्रैकिंग समस्याओं को हल करने के लिए संकुचन सिद्धांत उपकरण का फायदा उठाने का इरादा रखता है, जैसे कि विभिन्न मानकों के बीच परस्पर निर्भरता का सीधा तरीके से विश्लेषण किया जाता है। यह कार्य डिज़ाइन पैरामीटर के संदर्भ में अभिसरण सीमाओं को प्राप्त करने पर केंद्रित है जैसे कि ट्यूनिंग आसान हो जाती है और बेहतर प्रदर्शन प्राप्त करने के लिए परेशानी पैरामीटर की परिमाण में मनमाने ढंग से कमी से बचा जा सकता है। थीसिस के योगदान को चार प्रमुख भागों में विभाजित किया जा सकता है।

संकुचन सिद्धांत के आधार पर एसपीएस के मात्रात्मक विश्लेषण का लाभ दिखाने के लिए, उच्च लाभ प्रतिक्रिया तकनीक के आधार पर नियंत्रक के प्रदर्शन का विश्लेषण करने के लिए एक केस अध्ययन किया जाता है। इस उद्देश्य के लिए, उच्च लाभ प्रतिक्रिया नियंत्रक फ़िल्टर किए गए बैकस्टेपिंग नियंत्रक के रूप में चुना जाता है। संकुचन सिद्धांत आधारित अभिसरण विश्लेषण डिजाइन चर पर रूढ़िवादी सीमाओं को आराम देता है और यह साबित करता है कि स्थिर राज्य त्रुटि सीमाओं को मनमाने ढंग से एकवचन परेशानी पैरामीटर को कम किए बिना कम किया जा सकता है।
एक संकुचन सिद्धांत आधारित ढांचे को राज्य प्रतिक्रिया प्रतिक्रिया को सुलझाने और एकवचन रूप से परेशान सिस्टम के मानक और गैर मानक मॉडलों में समस्याओं को ट्रैक करने और अभिसरण सीमाओं को मापने के लिए प्रस्तावित किया गया है। संकुचन उपकरण का उपयोग पूरी तरह से अंतःक्रियात्मक परिस्थितियों की आवश्यकता को रोकता है और अभिसरण पैरामीटर की रूढ़िवादी सीमा से परे अभिसरण व्यवहार की गारंटी देता है। डिजाइन प्रक्रिया को गैर मानक मॉडल और अनुमानित फीडबैक रैखिक करने योग्य प्रणालियों तक भी बढ़ाया जाता है।

चूंकि कई व्यावहारिक मामलों में पूर्ण राज्य माप संभव नहीं है, इसलिए धीमे कई गुना पर कोई रूढ़िवादी प्रतिबंध डाले बिना संकुचन सिद्धांत के ढांचे में एक एचजीओ आधारित आउटपुट फीडबैक नियंत्रकों को डिजाइन करने के लिए काम बढ़ाया गया है। अभिसरण गतिशीलता अवधारणाओं का उपयोग बंद लूप ट्रैजेक्टोरियों की अंतिम सीमा सुनिश्चित करने के लिए किया जाता है और समय-समय पर डिज़ाइन में अंतर्निहित सीमित समय से बचने की घटना को बाहर करने के लिए किया जाता है। विश्लेषण परावर्तन पैरामीटर में भिन्नता के खिलाफ आउटपुट फीडबैक योजना की मजबूती का प्रदर्शन करता है और अंतिम सीमा के लिए आवश्यक थ्रेसहोल्ड सीमा को ट्यून करने के नए तरीके प्रदान करता है।
यह थीसिस सिस्टम के लिए संतृप्त नियंत्रक को डिजाइन करने के लिए एक संकुचन सिद्धांत आधारित पद्धति का भी प्रस्ताव करता है, जो फीडबैक रैखिक रूप में प्रपत्र में हैं। इस उद्देश्य के लिए, एक मानक एचजीओ के संयोजन के साथ एक उपन्यास उच्च लाभ गतिशील नियंत्रक का उपयोग एक चिकनी संतृप्त नियंत्रण इनपुट उत्पन्न करने के लिए किया जाता है। संकुचन सिद्धांत आधारित उपकरण एक अद्वितीय धीमी कई गुना के अस्तित्व को साबित करने और सीमित एक्ट्यूएशन पावर के साथ नियंत्रक के प्रदर्शन को मापने में सहायक होते हैं।

कुल मिलाकर, यह थीसिस एकवचन रूप से परेशान सिस्टम में स्थिरीकरण और समस्याओं को ट्रैक करने के लिए एक संकुचन सिद्धांत आधारित मात्रात्मक ढांचा विकसित करता है। प्रस्तावित पद्धतियां न केवल परंपरागत लाइपुनोव आधारित तकनीकों का विकल्प प्रदान करती हैं बल्कि हाल ही में संकुचन आधारित दृष्टिकोणों पर कुछ नए सुधार भी लाती हैं।

Contents

List of Figures ix
List of Tables xi

1 Introduction **1**
1.1 Singular Perturbation 3
1.1.1 Qualitative Stability Analysis Tools 4
1.2 Literature Review 6
1.2.1 Backstepping with High Gain Filters: 7
1.2.2 State Feedback Stabilization of SPS 7
1.2.3 High Gain Observers and Output Feedback Stabilization of SPS 8
1.2.4 Approximate Dynamic Inversion (ADI) 8
1.3 Motivation 9
1.3.1 Objective of the Thesis: 10
1.4 Quantitative Convergence Bounds for SPS 10
1.4.1 Relation Between Contracting and Convergent Systems 12
1.4.2 Robustness Properties of Contraction 12
1.4.3 Partial Contraction 13
1.5 Quantitative Bounds for a General SPS 15
1.5.1 Motivational Example 17
1.6 Contribution of the Thesis 20
1.7 Organization of the Thesis 22

2 Performance Analysis of High Gain Feedback Designs **25**
2.1 Intoduction 25
2.2 Contraction Theory Based Backstepping Design 28
2.2.1 Backstepping Design 28
2.3 Filtered Backstepping in the Absence of Disturbances 29

2.3.1 Convergence Analysis . . . 30
2.3.2 Robustness to Bounded Disturbances . . . 34
2.4 Filtered Backstepping with Disturbance Observer . . . 35
2.4.1 Disturbance Observer . . . 36
2.4.2 Control Law and Conversion to Singularly Perturbed form . . . 37
2.4.3 Derivation of Quantitative Convergence Bounds . . . 38
2.5 Output Feedback For Filtered Backstepping . . . 40
2.5.1 Observer Design . . . 40
2.5.2 Convergence Analysis . . . 43
2.6 Simulation Study . . . 46
2.6.1 Filtered Backstepping . . . 46
2.6.2 Output Feedback for Filtered Backstepping . . . 48
2.7 Summary . . . 49

3 Contraction Based State Feedback Stabilization of Nonlinear SPS 51
3.1 Introduction . . . 51
3.2 Stabilizing Controller Design For Standard Models . . . 52
3.2.1 Robustness Issues . . . 56
3.2.2 Exponential Convergence with Zero Steady State Error . . . 57
3.3 Tracking Controller Design for Standard and Nonstandard Models . . . 58
3.4 Application to Approximate Feedback Linearizable Systems . . . 61
3.4.1 Transformation to Singularly Perturbed Form . . . 62
3.4.2 Convergence of Transformed System Trajectories . . . 63
3.4.3 Controller Design Steps . . . 66
3.5 Simulation Examples . . . 67
3.5.1 Stabilization of a Standard Singularly Perturbed System . . . 67
3.5.2 A Nonstandard Case . . . 68
3.5.3 High Gain Scaling . . . 70
3.6 Summaray . . . 72

4 Contraction Theory Based Output Feedback for SPS 73
4.1 Introduction . . . 73
4.2 System Description and Output Feedback Design . . . 75
4.2.1 HGO Based Feedback and Time Scale Separation . . . 77
4.3 Convergence of Estimation Error . . . 78
4.4 Convergence of Closed Loop Trajectories . . . 83

4.4.1 Robustness with respect to μ . . . 87
4.4.2 Controller Design Steps . . . 89
4.5 Simulation Examples . . . 90
4.5.1 Output Feedback for Single Link Manipulator . . . 90
4.6 Summary . . . 94

5 Time Scale Redesign Based Saturated Output Feedback For Nonlinear Systems 95
5.1 System Description . . . 96
5.2 High Gain Dynamic Controller . . . 98
5.3 HGO Based Output Feedback . . . 100
5.4 Performance Evaluation . . . 101
5.4.1 Convergence of Estimation Error . . . 101
5.4.2 Convergence of $v(t)$ to the Slow Manifold $p(.)$ . . . 102
5.4.3 Boundedness of Tracking Error . . . 103
5.4.4 Convergence in Original System Coordinates . . . 105
5.5 Extension to MIMO Systems . . . 105
5.5.1 High Gain Dynamic Controller . . . 107
5.5.2 Performance Evaluation and Steady State Error Bounds . . . 110
5.6 Simulation Examples . . . 111
5.6.1 Bounded Stabilization of Wing Rock Phenomenon . . . 111
5.7 Application to Mobile Robot . . . 117
5.7.1 Experimental Scenario . . . 119
5.7.2 Experimental Results . . . 120
5.8 Summary . . . 124

6 Conclusions 125
6.1 Future Work . . . 127

Bibliography 129

Appendices 137

List of Figures

1.1 Closed Loop System Response for $\mu = 0.5$ . . . 18
1.2 Flow of the Thesis . . . 24

2.1 Tracking Error Bound for Three Cases . . . 26
2.2 Tracking Error Bound for $\mu = 0.01$ . . . 47
2.3 Disturbance Estimation Error . . . 48
2.4 Tuning of Tracking Error Bound for $\mu = 0.4$ . . . 48
2.5 Estimation Error with LTV Observer . . . 49
2.6 Tracking Error with LTV Observer . . . 49

3.1 Convergence of Trajectories for $\mu = 0.99$ . . . 68
3.2 Convergence of System Trajectories for $\mu = 0.1$ and $\lambda_{ex} = 1$ . . . 69
3.3 Convergence of System Trajectories for $\mu = 0.1$ and $\lambda_{ex} = 10$ . . . 69
3.4 Convergence of trajectories for different contraction rates . . . 71

4.1 Evolution of $\xi_1(t)$ in closed loop . . . 74
4.2 Evolution of State Trajectories For $\epsilon = 0.05$ . . . 91
4.3 Robustness with respect to ϵ . . . 92
4.4 Robustness with respect to μ . . . 93
4.5 Effect of Disturbance . . . 93
4.6 Convergence with a bounded $P(.)$ . . . 94

5.1 Sustained Oscillation in Uncontrolled Wing Rock Dynamics (Init. Cond. are Converted to rad) . . . 112
5.2 Phase Portrait of Closed Loop System . . . 112
5.3 Control Input Without Uncertainty . . . 113
5.4 Tracking Errors with Variations in Parameters . . . 113
5.5 Evolution of Trajectories in Closed Loop . . . 114
5.6 Control Input with Uncertainty . . . 114

5.7 Estimation Error 115
5.8 Tracking Error 115
5.9 Control Input Before Tuning 116
5.10 Tracking Error After Tuning 116
5.11 Control Input After Tuning 117
5.12 Schematic of a WMR. 117
5.13 Architecture of the Control Law. 120
5.14 Circular path tracking with the proposed controller. 121
5.15 Tracking performance of the proposed controller in x_c, y_c positions for Case (1). 121
5.16 Tracking performance of the proposed controller in wheel positions for Case (1). 122
5.17 Control input requirement for Case (1). 122
5.18 Tracking performance of the proposed controller for various cases in wheel positions. 123
5.19 Control input requirement for Case (2) (upper figure) and Case (3) (lower figure). 123

List of Tables

4.1 91

List of Abbreviations

SP: Singular Perturbation

SPS: Singularly Perturbed Systems

WMR: Wheeled Mobile Robots

LMI: Linear Matrix Inequality

DSC: Dynamic Surface Control

HGO: High Gain Observer

SOS: Sum Of Squares

ADI: Approximate Dynamic Inversion

PI: Proportional- Integral

DC: Direct Current

SISO: Single Input Single Output

MIMO: Multi Input Multi Output

List of Symbols

R: Set of Real Numbers

R^+: Set of Positive Real Numbers

R^n: Euclidian Space of n Dimension

I: Identity Matrix

Θ: Non Singular Transformation Matrix

M: Contraction Metric

λ: Eigenvalue of a Matrix

β: Contraction Rate

t: Time

$exp(.)$: Exponential Function

lim: Limit

$||x||$: Euclidian Norm of a Vector x

$||A||$: Euclidian Norm of a Matrix A

$sup(x)$: Supremum of a vector x

χ: Condition Number

lim sup: Supremum of Limit

$max(.)$: Maximum

$min(.)$: Minimum

Diag(): Diagonal Matrix

$\forall$: For All

$\exists$: There Exists