# COMPACT FILTER REGULARIZATION AND ADAPTIVE SPECTRAL GRAPH WAVELET METHOD WITH REGULARIZATION FOR PDEs ON GRAPH


ANKITA SHUKLA



DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI


SEPTEMBER 2020

# COMPACT FILTER REGULARIZATION AND ADAPTIVE SPECTRAL GRAPH WAVELET METHOD WITH REGULARIZATION FOR PDEs ON GRAPH

by


**ANKITA SHUKLA**

Department of Mathematics


Submitted

in fulfillment of the requirements of the degree of Doctor of Philosophy

to the


INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI

SEPTEMBER 2020

**Dedicated to**

**My Family**

# Certificate

This is to certify that the thesis entitled **"Compact filter regularization and adaptive spectral graph wavelet method with regularization for PDEs on graph"** submitted by **"Ms. Ankita Shukla"** to the Indian Institute of Technology Delhi, for the award of the Degree of **Doctor of Philosophy**, is a record of the original bona fide research work carried out by her under my supervision and guidance. The thesis has reached the standards fulfilling the requirements of the regulations relating to the degree.

The results contained in this thesis have not been submitted in part or full to any other university or institute for award of any degree or diploma.

New Delhi
September 2020

**Dr. Mani Mehra**
**Associate Professor**
**Department of Mathematics**
**Indian Institute of Technology Delhi**

# Acknowledgements

*This thesis marks the end of the beautiful journey to achieve my Ph.D. degree. Throughout this journey, I have been supported and guided by several people. I would like to take this opportunity to express my gratitude to all those people.*

*My first and sincere appreciation goes to Dr. Mani Mehra, my supervisor for all I have learned from her and for her continuous help and support in all stages of this thesis. I would also like to thank her for being an open person to ideas, and for encouraging and helping me to shape my interests and ideas. This thesis would not happen to be possible without the ardent support and care she provided me academically and personally.*

*It is with immense gratitude that I acknowledge Prof. Günter Leugering, vice president, FAU, Germany. His advice and discussions were invaluable to me. His energetic attitude toward research always inspires me to work harder at my studies. I really appreciate him for always being so supportive.*

*It gives me great pleasure in acknowledging the help from Dr. S. Sampath. He has been a great source of knowledge and inspiration to me. I want to say thank him for all the advice and discussions during my Ph.D. journey.*

*I am thankful to IIT Delhi authorities for providing me the necessary facilities for the smooth completion of my Ph.D. I would like to give special thanks to my Student Research Committee members: Dr. S. Sampath, Dr. Harish Kumar and Dr. Anup Singh for their valuable time and suggestions. A special thanks to Prof. K. Sreenadh, Head of the Department and Prof. S. Dharmaraja, former Head of the Department for their support. I express my gratitude to all the faculty members and staff of the Department of Mathematics, IIT Delhi, for their support. I would also like to thank anonymous reviewers and editors of our papers for their useful and enriching suggestions.*

*My greatest appreciation goes to my senior Dr. Kuldip Singh Patel and my closest friends Dr. Tuhina Mukherjee, Suchismita Patra and Asmita, who was always a great support in all my struggles and frustrations. They have made my time at IIT Delhi much more enjoyable and prosperous. I share the credit of my work with my friends Shaily Verma, Nitu Sharma, Pooja Bansal, Abhilash Sahu, Srashti Dwivedi, Aman Rani and Vaibhav Mehandiratta. I cannot write the name of each of my friend, but I would like to thank all my friends, I feel blessed to have all of you in my life.*

*Above all, I would like to thank my parents for their love, blessings, support, encouragement, sacrifice and unwavering belief in me. Without them, I would not be the person I am today. I would like to express my respect and gratitude to my father-in-law for his blessing and unconditional love. I would like to say special thanks to my loving husband, Shailesh, who has been very patient and understanding at every stage of my Ph.D. journey. Thank you for always being there with me. Finally, I want to express my gratitude to Vivek, Neha, Vishal and Mudit for their love and support.*

*September 2020* *Ankita Shukla*

# Abstract

Inverse problems has numerous important applications in science and industry, which is responsible for its growth in the last few decades. We have proposed high order compact filter as a regularization method for solving some inverse problems which are ill-posed. In this method, we do not have to go back and forth each time between physical and Fourier domain, unlike other filtering methods. We have considered the inverse problem in the field of heat transfer, which is classified into three types: determination of the initial state of the system, determination of the boundary conditions, and identification of the physical parameters or source term identification. We discuss the numerical implementation of the compact filter regularization method to obtain a stable solution for inverse problems one of each type. The problems include homogeneous and non-homogeneous backward heat conduction problems, sideways heat equation, and source term identification problem. The advantage of using high order compact filter regularization method is:

- The proposed method is easy to implement and more efficient as all the computations are done in the physical domain only.
- Compact filters are smooth filter that is preferred as compared to a sharp filter.

We have also provided the error estimates for the exact and regularized solution for these problems. Some numerical experiments are done to validate the efficiency and accuracy of the proposed method. We applied fourth-order compact difference approximation for the second derivative, which proves to have better resolution ability as compared to a standard finite difference approximation.

Nonetheless, the proposed high order compact filter regularization method is very convenient and works well to stably solve inverse problems on flat geometries, we do not know how to apply them for inverse problems defined on complex geometries or graph structure. To solve inverse problems on the graph structure, we have proposed spectral graph wavelet (SGW) as a regularization method. The concept of spectral graph wavelet is based on the graph Laplacian and its construction is done in the spectral graph domain.

In order to validate the applicability of the spectral graph wavelet-based method on a graph, we have initially solved some direct problems. A fast adaptive spectral graph wavelet is developed to solve some PDEs on graph (network-like structures). In the proposed method, SGW serves the following purposes:

- The same matrix is used for the numerical approximation of the graph laplacian as well as for the construction of spectral graph wavelet.
- Wavelet coefficients are used as an indicator function to guide the refinement of the node arrangement which leads to the generation of an adaptive grid.

The proposed method is first applied to solve linear parabolic PDEs on two different graphs. The stability analysis of the proposed method is derived which shows that the method is unconditionally stable. To consider a more general and real-world problem, water wave propagation in open channel networks is analyzed. This problem can be mathematically modeled as Burgers' equation (parabolic PDE having non-linear advection term) on a star-shaped connected graph. The numerical illustrations show that the method accurately captures the emergence of the localized patterns at all the scales, including the junction of the network, and the node arrangement is accordingly adapted. The convergence of the given method is verified, and the efficiency is discussed in terms of CPU time.

Finally, we have proposed the spectral graph wavelet regularization for inverse problems defined on the graph structure. In order to have an efficient solution, we have also used SGW for adaptivity. The numerical implementation of the spectral graph wavelet-based method is discussed mainly to solve the backward heat conduction problem on a graph arising from regular one-dimensional and two-dimensional mesh. Moreover, the

error estimate between the exact and wavelet regularized solution is derived. Numerical results show that we can obtain a stable and efficient solution using the adaptive spectral graph wavelet regularization method.

# सार


इनवर्स प्रोब्लेम्स का विज्ञान और उद्योग में कई महत्वपूर्ण अनुप्रयोग हैं, जो पिछले कुछ दशकों में इसकी वृद्धि के लिए जिम्मेदार है। हमने कुछ इनवर्स प्रोब्लेम्स को हल करने के लिए एक नियमितीकरण विधि के रूप में उच्च क्रम वाले कॉम्पैक्ट फ़िल्टर का प्रस्ताव किया है जो इल पोस्ड हैं। इस पद्धति में, हमें भौतिक और फूरियर डोमेन के बीच, अन्य फ़िल्टरिंग विधियों के विपरीत, हर बार पीछे नहीं जाना पड़ता है। हमने गर्मी हस्तांतरण के क्षेत्र में व्युत्क्रम समस्या पर विचार किया है, जिसे तीन प्रकारों में वर्गीकृत किया गया है: प्रणाली की प्रारंभिक स्थिति का निर्धारण, सीमा की स्थिति का निर्धारण, और भौतिक मापदंडों या स्रोत शब्द की पहचान की पहचान। हम प्रत्येक प्रकार के इनवर्स प्रोब्लेम्स के लिए एक स्थिर समाधान प्राप्त करने के लिए कॉम्पैक्ट फिल्टर नियमितीकरण विधि के संख्यात्मक कार्यान्वयन पर चर्चा करते हैं| समस्याओं में समरूप और गैर-सजातीय बैकवर्ड हीट कंडक्शन समस्याओं, साइडवेज़ हीट समीकरण और स्रोत शब्द पहचान समस्या शामिल हैं। उच्च क्रम कॉम्पैक्ट फ़िल्टर नियमितिकरण विधि का उपयोग करने का लाभ यह है:

- प्रस्तावित विधि को लागू करना आसान है और अधिक कुशल है क्योंकि सभी गणना केवल भौतिक डोमेन में की जाती हैं।
- सघन फिल्टर्स की तुलना में कॉम्पेक्ट फिल्टर्स स्मूथ फिल्टर होते हैं।

हमने इन समस्याओं के सटीक और नियमित समाधान के लिए त्रुटि अनुमान भी प्रदान किया है। प्रस्तावित विधि की दक्षता और सटीकता को मान्य करने के लिए कुछ संख्यात्मक प्रयोग किए जाते हैं। हमने दूसरे व्युत्पन्न के लिए चौथे क्रम के कॉम्पैक्ट अंतर सन्निकटन को लागू किया, जो एक मानक परिमित अंतर सन्निकटन की तुलना में बेहतर रिज़ॉल्यूशन क्षमता है।

बहरहाल, प्रस्तावित उच्च क्रम कॉम्पैक्ट फ़िल्टर नियमितीकरण विधि बहुत सुविधाजनक है और फ्लैट ज्यामितीयों पर इनवर्स प्रोब्लेम्स को हल करने के लिए अच्छी तरह से काम करती है, हम नहीं जानते कि उन्हें जटिल ज्यामितीय या ग्राफ संरचना पर परिभाषित इनवर्स प्रोब्लेम्स के लिए कैसे लागू किया जाए। ग्राफ संरचना पर इनवर्स प्रोब्लेम्स को हल करने के लिए, हमने एक नियमितीकरण विधि के रूप में वर्णक्रमीय ग्राफ वेवलेट (SGW) का प्रस्ताव किया है। वर्णक्रमीय ग्राफ़ वेवलेट की अवधारणा ग्राफ लाप्लासियन पर आधारित है और इसका निर्माण दर्शक में किया जाता है।

ग्राफ़ पर वर्णक्रमीय ग्राफ़ वेवलेट-आधारित पद्धति की प्रयोज्यता को मान्य करने के लिए, हमने शुरू में कुछ प्रत्यक्ष समस्याओं को हल किया है। एक तेज़ अनुकूली वर्णक्रमीय ग्राफ़ वेवलेट को कुछ PDEs को ग्राफ (नेटवर्क जैसी संरचनाओं) को हल करने के लिए विकसित किया जाता है। प्रस्तावित विधि में, SGW निम्नलिखित उद्देश्यों को पूरा करता है:

- उसी मैट्रिक्स का उपयोग ग्राफ लैपलियन के संख्यात्मक अनुमान के साथ-साथ वर्णक्रमीय ग्राफ वेवलेट के निर्माण के लिए किया जाता है।
- वेवलेट गुणांक को नोड व्यवस्था के शोधन के लिए एक संकेतक फ़ंक्शन के रूप में उपयोग किया जाता है जो एक अनुकूली ग्रिड की पीढ़ी की ओर जाता है।

प्रस्तावित विधि को पहले दो अलग-अलग रेखांकन पर रैखिक परवलयिक PDEs के समाधान के लिए लागू किया जाता है। प्रस्तावित विधि का स्थिरता विश्लेषण व्युत्पन्न है जो दर्शाता है कि विधि बिना शर्त के स्थिर है। अधिक सामान्य और वास्तविक दुनिया की समस्या पर विचार करने के लिए, खुले चैनल नेटवर्क में जल तरंग प्रसार का विश्लेषण किया जाता है। यह समस्या गणितीय रूप से एक स्टार-आकार से जुड़े ग्राफ पर बर्गर के समीकरण (पैराबोलिक PDE गैर-रेखीय संचलन अवधि वाले) के रूप में तैयार की जा सकती है। संख्यात्मक चित्रण से पता चलता है कि विधि नेटवर्क के जंक्शन सहित सभी पैमानों पर स्थानीयकृत पैटर्न के उद्भव को सटीक रूप से पकड़ती है, और नोड व्यवस्था तदनुसार अनुकूलित होती है। दी गई विधि के अभिसरण को सत्यापित किया गया है, और CPU समय के संदर्भ में दक्षता पर चर्चा की गई है।

अंत में, हमने ग्राफ़ संरचना पर परिभाषित के लिए वर्णक्रमीय ग्राफ तरंगिका नियमितीकरण का प्रस्ताव दिया है। कुशल समाधान करने के लिए, हमने अनुकूलन के लिए SGW का भी उपयोग किया है। वर्णक्रमीय ग्राफ़ वेवलेट-आधारित पद्धति का संख्यात्मक कार्यान्वयन मुख्य रूप से नियमित एक-आयामी और दो-आयामी जाल से उत्पन्न होने वाले ग्राफ पर बैकवर्ड  हीट कंडक्शन समस्या को हल करने के लिए चर्चा की गई है। इसके अलावा, सटीक और तरंगिका नियमित समाधान के बीच त्रुटि का अनुमान है। संख्यात्मक परिणाम बताते हैं कि हम अनुकूली वर्णक्रमीय ग्राफ वेवलेट नियमितीकरण विधि का उपयोग करके एक स्थिर और कुशल समाधान प्राप्त कर सकते हैं।

# Contents

# List of Figures

# List of Tables

# List of Symbols

| **Symbol** | **Meaning** |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | Set of *real numbers* |
| $\mathbb{D}$ | $k$-dimensional bounded space domain in $\mathbb{R}^k$ |
| $X$ | Banach space |
| $\forall x$ | For *all* $x$ |
| $x \in X$ | $x$ is a *member* of $X$ |
| $F_\alpha(\omega)$ | Transfer function |
| $\mathcal{G}$ | Connected graph |
| $V$ | set of vertices |
| $E$ | set of edges |
| $A$ | Adjacency matrix |
| $\mathcal{L}$ | Laplacian operator |
| $g$ | Wavelet kernel |
| $\mathsf{h}$ | Scaling kernel |
| $\phi(x)$ | Scaling function |
| $\psi(x)$ | Wavelet function |

| | |
|---|---|
| $\Omega$ | space-time domain |
| $\nu$ | heat diffusion coefficient |
| $\omega''$ | modified wavenumber |
| $\mathcal{L}_2$ | Set of square integrable function |
| $h$ | spatial grid size |
| $\Delta t$ | time step size |
| $u_f$ | filtered value of $u$ |
| $D$ | space discretization matrix |
| $\|.\|_2$ | $L_2$-norm |
| $e_u$ | relative error with discrete $l_2$-norm |
| $\delta$ | noise level |
| $\Theta$ | efficiency coefficient |