

**BOX DIMENSION OF HARMONIC FUNCTIONS AND
 p -LAPLACIAN EQUATIONS ON THE SIERPINSKI GASKET**

ABHILASH SAHU



**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI
JANUARY 2020**

©Indian Institute of Technology Delhi (IITD), New Delhi, 2020

**BOX DIMENSION OF HARMONIC FUNCTIONS
AND p -LAPLACIAN EQUATIONS ON THE
SIERPINSKI GASKET**

ABHILASH SAHU

Department of Mathematics

Submitted

in fulfillment of the requirements of the degree of Doctor of Philosophy

to the



**Indian Institute of Technology Delhi
January 2020**

Dedicated to

My Parents

Akshaya Kumar Sahu & Suniti Sahu

Certificate

This is to certify that the thesis entitled “**Box dimension of harmonic functions and p -Laplacian equations on the Sierpinski gasket**” submitted by **Mr. Abhilash Sahu** to the Indian Institute of Technology Delhi for the award of the degree of Doctor of Philosophy, is a record of the original bona fide research work carried out by him under my supervision and guidance. The thesis has reached the standards fulfilling the requirements of the regulations relating to the degree.

The results contained in this thesis have not been submitted in part or full to any other university or institute for the award of any degree or diploma.

Dr. Amit Priyadarshi

Assistant Professor

Department of Mathematics

Indian Institute of Technology Delhi

New Delhi 110016

Acknowledgements

Above all, I thank the invisible power called 'GOD.' No way I can thank everybody who helped me in this journey, but I will take this opportunity to say thank you to a few of them.

Firstly, I am thankful to my thesis supervisor Dr. Amit Priyadarshi for his belief in me. He had given freedom to explore different areas of fractals. During my Ph.D. his careful guidance and exchange of ideas were commendable.

I would like to thank my SRC(student research committee) members Prof. S.D. Joshi, Dr. N. Shraavan Kumar, and Prof. K. Sreenadh for their valuable comments. I am also thankful to faculty members and staffs of the Department of Mathematics, IIT Delhi. I also thank CSIR-UGC for the financial support in the form of the research fellowship. Financial support given by DST-SERB for travel to attend the conference "Fractal geometry and stochastics 6" at Bad Harrenalb, Germany is acknowledged.

The pleasant stay in IIT Delhi is memorable because of my friends; they stood by me irrespective of the situations. I ought to thank my friends Abhay, Rajashekhar, Anuj, Tuhina, Suchi, Ankita for their company. I want to thank my seniors/brothers Dr. Shailesh Tiwari, Arun Chaudhury, Gavendra Pandey for their support. This list goes on to appreciate my juniors/lab mates Vishvesh, Rattan, Manoj, Dilip, Manpreet, Saurav with whom I share the workspace and they maintain a positive vibe there. My hostel mates Ravi, Surojit, Abhinav, Siddharth and many more; I want to thank all of them. My stay at IIT Delhi is wonderful just because of you all.

I am in this position due to the encouragement of my teachers at different levels. I must thank my teachers at Larambha Primary school and Jawahar Navodaya Vidyalaya Sambalpur. I want to thank Prof. Swadheenananda Pattanayak, Dr. Jugal Mohapatra, Girish Ch. Nayak, Mrutyunjay Sethi who

introduced me to advanced mathematics. I also acknowledge the contributions of Professors at IIT Guwahati, especially Dr. Jitendriya Swain, Dr. Gautam Kr. Das, Dr. Anjan Kr. Chakrabarty whose motivation meant a lot to me and gave the courage to pursue Ph.D.

At last, I would like to thank my Bapa and Maa the most precious thing I have. Their constant support during the whole journey is acknowledged. Whatever I have achieved is because of their belief, blessing, sacrifices and much more. I would like to thank my baba, mama, kaka, kaka who had taken care of mine as their child. I will thank my brothers Jitu dada, Manas dada, Siky, Ashish and sisters Lipsa, Rinki, Pinki, Sanjukta, Parvati Nani for their love and support. This list will be incomplete without these beautiful names, my sweetest nephew/niece Shreyanshu, Ria, Pratikshya, and Pragati; they always bring a smile on my face. Also, like to thank Sanat dada, Nilima bhauja and their lovely kids Sanu and Sinu with whom I feel like at home in Delhi. In the end, I would like to acknowledge my extended family mamu, maeen, mausa, mausi, nani, piusa, joeen, brothers, sisters and their kids for making our family beautiful.

I want to thank my friends Samir, Sangita, Gopal, Debu and friends at IITM for their love and hospitality during my visit to IIT Madras. The time I spend with them will be memorable forever. I know this list is incomplete and I do not know how to complete it. In the end, I want to thank you all who directly/indirectly helped me in any manner. Thank you all !!

Abstract

In this thesis, we focus on obtaining bounds for dimension of the graph of functions on the Sierpiński gasket. Also, we will show the existence and multiplicity of weak solutions to some p -Laplacian equations on the Sierpiński gasket. Earlier, many authors have studied Laplacian and p -Laplacian equations on regular domains (bounded domain with smooth boundary). Strichartz, Kigami, Barlow and some more authors took a step forward and defined Laplacian on the Sierpiński gasket and p.c.f. fractals. Herman, Peirone and Strichartz defined p -Laplacian on the Sierpiński gasket. Many authors have studied about the existence and multiplicity of solutions, eigenfunctions decimation, distributions of eigenvalues, Hot spot conjecture and addressed many related questions. All of them answered these questions based on Laplacian equations. This is one of the reasons, we have considered p -Laplacian equations on the Sierpiński gasket and did our analysis. Also, we have provided bound for box-dimension of the graph of Harmonic functions on the Sierpiński gasket.

In chapter 1, we will give a brief introduction about fractals, where we provide a possible characterization of fractals and how to identify them. Also, we discuss different notion of fractal dimensions and give some idea to calculate them. Analysis on fractals is a crucial part of our study. So we will explain its motivation, applications in real life and more. At last, we give motivation for this thesis.

Chapter 2 comprises of many definitions and well known results which we require to build up this thesis. We recall the definition of Hausdorff metric, s -dimensional Hausdorff measure and with the help of this, we define the Hausdorff dimension. Then we describe the Iterated function system(IFS) and with the help of this, we define fractal interpolation function(FIF). We present the construction of Sierpiński gasket and different aspects to look at it. The concept of weak Laplacian and p -Laplacian on Sierpiński gasket is also presented. At last, we define harmonic function and give a formula to construct it whenever we know the functional values at boundary points.

In chapter 3, we elaborate the process of constructing fractal interpolation functions on the Sierpiński gasket. Taking help of this, we will show the existence of fractal functions in the function space $\text{dom}(\mathcal{E})$, that is, all finite energy functionals on the Sierpiński gasket. Moreover, we provide bounds for the box dimension of some functions that belong to the family of continuous functions and arise as fractal interpolation functions. Further, we have obtained bounds for the box dimension of the graph of a harmonic function on the Sierpiński gasket. Also, we get upper and lower bounds for the box dimension of the graph of functions that belongs to $\text{dom}(\mathcal{E})$.

In chapter 4, we study the following boundary value problem involving the weak p -Laplacian

$$-\Delta_p u = \lambda a(x)|u|^{p-2}u + b(x)|u|^{\ell-1}u \text{ in } \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_0; \quad u = 0 \text{ on } \mathcal{S}_0,$$

where \mathcal{S} is the Sierpiński gasket in \mathbb{R}^2 , \mathcal{S}_0 is its boundary, $\lambda > 0$, $p > 2$, $p-1 < \ell$ and $a, b : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ are appropriate functions. We will show the existence of a nontrivial weak solution to the above problem for a certain range of λ using the analysis of fibering maps on suitable subsets.

In chapter 5, we will study a more general version of the above problem and

show the existence of solutions to the following boundary value problem

$$-\Delta_p u = \lambda a(x)|u|^{q-1}u + b(x)|u|^{l-1}u \text{ in } \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_0; \quad u = 0 \text{ on } \mathcal{S}_0,$$

where \mathcal{S} is the Sierpiński gasket in \mathbb{R}^2 , \mathcal{S}_0 is its intrinsic boundary, $\lambda > 0$, $p > 1$, $0 < q < p - 1 < l$ and $a, b : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ are bounded nonnegative functions. With the above hypothesis we will show the existence of at least two nontrivial weak solutions to the above problem for a certain range of λ using the fibering map technique.

In chapter 6, we examine a system of weak p-Laplacian equations

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda a(x)|u|^{q-2}u + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} h(x)|u|^{\alpha-2}u|v|^\beta \text{ in } \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_0 \\ -\Delta_p v &= \mu b(x)|v|^{q-2}v + \frac{\beta}{\alpha + \beta} h(x)|u|^\alpha|v|^{\beta-2}v \text{ in } \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_0 \\ u &= v = 0 \text{ on } \mathcal{S}_0, \end{aligned}$$

on the Sierpiński gasket in \mathbb{R}^2 . Parameters $\lambda, \gamma, \alpha, \beta$ are real and satisfies $1 < q < p < \alpha + \beta$. Functions $a, b, h : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ are suitably chosen. For $p > 1$, we show the existence of at least two nontrivial weak solutions to the above system of equations for some $(\lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^2$.

In the last chapter, we will give concluding remark on the thesis. Also, we give some possible directions to work in future.

सारांश

इस शोध प्रबंध में, हम सिएरपिन्स्की गैसकेट पर फलन के रेखा-चित्र के आयामों के लिए सीमा प्राप्त करने पर ध्यान केंद्रित करते हैं। साथ ही, हम सिएरपिन्स्की गैसकेट पर कुछ वीक पी-लाप्लासियन समीकरणों के कमजोर समाधान के अस्तित्व और बहुलता दिखाएंगे। इससे पहले, कई लेखकों ने रेगुलर डोमेन (स्मूथ कनेक्टेड डोमेन) पर लाप्लासियन और पी-लाप्लासियन समीकरणों का अध्ययन किया है। स्ट्रीचार्टज़, किगामी, बार्लो और कुछ अन्य लेखकों ने एक कदम आगे बढ़ाया और सीरपिन्स्की गैसकेट एवं $p.c.f$ फ्रेक्टल पर लैपेलिशियन का परिभाषा दिए। हरमन, पीरोन और स्ट्रीचार्ट ने पी-लाप्लासियन को सीरपिन्स्की गैसकेट पर परिभाषित किया। कई लेखकों ने समीकरणों के समाधानों के अस्तित्व और बहुलता के बारे में अध्ययन किया है, आइगनफंक्शन डेसीमेशन, आइगनवैल्यू का वितरण, हॉट स्पॉट कंजेक्चर और कई संबंधित प्रश्नों को संबोधित किया है। इन सभी ने लाप्लासियन समीकरणों पर आधारित इन सवालों के जवाब दिए हैं। यह एक कारण है, हमने सिएरपिन्स्की गैसकेट पी-लाप्लासियन समीकरण पर अध्ययन और विश्लेषण किया है। इसके अलावा, हमने सीरपिन्स्की गैसकेट पर हार्मोनिक फलन के ग्राफ के बॉक्स-आयाम के लिए सीमा किया है।

प्रथम अध्याय में, हम फ्रेक्टल के बारे में एक संक्षिप्त परिचय देंगे, जहां हम फ्रेक्टल का एक संभावित लक्षण का वर्णन प्रदान करेंगे और उनकी पहचान कैसे करें बताएंगे। इसके अलावा, हम फ्रेक्टल आयामों की अलग-अलग परिभाषा पर चर्चा करेंगे और उन्हें गणना करने के लिए कुछ तरीका बताएंगे। एनालिसिस ऑन फ्रेक्टल हमारे अध्ययन का एक महत्वपूर्ण हिस्सा है। हम इसकी प्रेरणा, वास्तविक जीवन में अनुप्रयोगों की व्याख्या करेंगे। अंत में, हम इस शोध प्रबंध के अध्ययन के लिए प्रेरणा देंगे।

द्वितीय अध्याय में कई परिभाषाएँ और प्रसिद्ध परिणाम शामिल हैं जिसकी इस शोध प्रबंध में आवश्यकता है। हम हौसडॉर्फ मीट्रिक, एस-डाइमेंशनल हौसडॉर्फ मेजर की परिभाषा देंगे और इसकी मदद से हम हौसडॉर्फ आयाम की परिभाषा देंगे। फिर हम आइटेरेटेड फंक्शन सिस्टम (IFS) का वर्णन करेंगे और इसकी सहायता से हम फ्रेक्टल इंटरपोलेशन फंक्शन (FIF) को परिभाषित करेंगे। हम सिएरपिन्स्की गैसकेट के निर्माण और उसके विभिन्न पहलुओं को प्रस्तुत करेंगे। इस अध्याय में सिएरपिन्स्की गैसकेट पर लाप्लासियन और पी-लाप्लासियन की अवधारणा भी प्रस्तुत की गई है। अंत में, हम हार्मोनिक फंक्शन को परिभाषित करेंगे और इसका निर्माण करने का सूत्र देंगे जो फंक्शन का बाउंड्री वैल्यू पता होने पर उपयोग किया जा सकता है।

तृतीय अध्याय में, हम सिएरपिन्स्की गैसकेट पर फ्रेक्टल इंटरपोलेशन फंक्शन के निर्माण की प्रक्रिया को विस्तृत करेंगे। इसकी मदद लेते हुए, हम फंक्शन स्पेस $\text{dom}(E)$ (सिएरपिन्स्की गैसकेट पर सभी फाइनिट एनर्जी फंक्शनल का समूह) में फ्रेक्टल फंक्शन के अस्तित्व को दिखाएंगे। इसके अलावा, हम कुछ फंक्शन जो कन्टीन्यूस फंक्शन के परिवार से संबंधित और फ्रेक्टल इंटरपोलेशन फंक्शन के रूप में उत्पन्न होते हैं उसके बॉक्स आयाम के लिए सीमा प्रदान करेंगे। इसके अलावा, हमने सिएरपिन्स्की गैसकेट पर हार्मोनिक फंक्शन के ग्राफ का बॉक्स आयाम के लिए सीमाएँ निर्धारण करेंगे। इसके अलावा, हम $\text{dom}(E)$ से संबंधित फंक्शन का ग्राफ के बॉक्स आयाम के लिए ऊपरी और निचले सीमा निर्धारण करेंगे।

चौथा अध्याय में, हम वीक पी-लाप्लासियन को शामिल करते हुए निम्नलिखित बाउंड्री वैल्यू प्रॉब्लम का अध्ययन करेंगे।

$$-\Delta_p u = \lambda a(x)|u|^{p-2}u + b(x)|u|^{l-1}u \quad \text{इन } S \setminus S_0; u = 0 \text{ ऑन } S_0$$

उपर लिखे समीकरणों में S सिएरपिन्स्की गैसकेट, S_0 इसकी सीमा, $\lambda > 0$, $p > 2$, $p-1 < l$ एवं $a, b: S \rightarrow R$ उपयुक्त फंक्शन है। हम λ की एक निश्चित रेंज के लिए उपर लिखे समीकरणों का नॉन ट्रिविअल वीक समाधान के अस्तित्व को दिखाएंगे।

पांचवां अध्याय में, हम उपरोक्त समस्या के अधिक सामान्य संस्करण का अध्ययन करेंगे और निम्नलिखित बाउंड्री वैल्यू प्रॉब्लम के समाधान के अस्तित्व को दिखाएंगे।

$$-\Delta_p u = \lambda a(x)|u|^{q-1}u + b(x)|u|^{l-1}u \quad \text{इन } S \setminus S_0; u = 0 \text{ ऑन } S_0$$

उपर लिखे समीकरणों में S सिएरपिन्स्की गैसकेट, S_0 इसकी सीमा, $\lambda > 0$, $p > 1$, $0 < q < p-1 < l$ एवं $a, b: S \rightarrow R$ बाउंडेड नॉन नेगेटिव फंक्शन है। λ की एक निश्चित रेंज के लिए, उपरोक्त परिकल्पना के आधार पर फाईबेरिंग मैप तकनीक का उपयोग से उपरोक्त समस्या के लिए कम से कम दो नॉन ट्रिविअल वीक समाधानों का अस्तित्व दिखाएंगे।

छठा अध्याय में, हम S सिएरपिन्स्की गैसकेट पर वीक पी-लाप्लासियन समीकरणों की एक सिस्टम की जांच करेंगे ।

$$-\Delta_p u = \lambda a(x)|u|^{q-2}u + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} h(x)|u|^{\alpha-2}u|v|^\beta \quad \text{इन } S \setminus S_0$$

$$-\Delta_p v = \gamma b(x)|v|^{q-2}v + \frac{\beta}{\alpha + \beta} h(x)|u|^\alpha|v|^{\beta-2}v \quad \text{इन } S \setminus S_0$$

$$u = v = 0 \quad \text{ऑन } S_0$$

पैरामीटर $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ वास्तविक संख्या हैं और $1 < q < p < \alpha + \beta$ को संतुष्ट करते हैं । फंक्शन $a, b, h : S \rightarrow R$ उपयुक्त रूप से चुने गए हैं । $p > 1$ एवं कुछ (λ, γ) के लिए उपरोक्त समीकरणों की सिस्टम दो नॉन ट्रिविअल वीक समाधानों का अस्तित्व दिखाएंगे ।

अंतिम अध्याय में, हम यह शोध प्रबंध पर समापन टिप्पणी देंगे। साथ ही, हम भविष्य में काम करने के लिए कुछ संभावित दिशा-निर्देश देंगे ।

Contents

Certificate	i
Acknowledgements	iii
Abstract	v
List of Figures	xiii
List of Tables	xv
List of Symbols	xvii
1 Introduction	1
1.1 What are fractals?	1
1.2 Fractal dimensions	2
1.3 Analysis on fractals	3
1.4 Motivation of the thesis	4
2 Preliminaries	7
2.1 Hausdorff metric	7
2.2 Hausdorff Measure	8
2.3 Fractal dimensions	8

2.3.1	Hausdorff Dimension	8
2.3.2	Box-counting Dimension	8
2.4	Iterated Function Systems	9
2.5	Fractal Interpolation Functions	10
2.6	Sierpiński gasket	11
2.7	Laplacian on the Sierpiński gasket	12
2.8	p -Laplacian on Sierpiński gasket	14
2.9	Banach spaces	19
3	Box dimension of harmonic function	21
3.1	Motivation	22
3.2	Fractal functions in $\text{dom}(\mathcal{E})$ and its properties	26
3.2.1	Fractal Interpolation Functions on the Sierpiński gasket	26
3.2.2	Construction of α -fractal functions on the Sierpiński gasket	27
3.3	Box dimension of graph of fractal functions	30
3.4	Box dimension of graph of Harmonic functions	36
4	Elliptic equation on the Sierpiński gasket	43
4.1	Motivation	44
4.2	Euler functional and its analysis	47
4.3	Analysis of the map ϕ_u	50
4.4	Proof of Main Results	52
5	Boundary value problem on the Sierpiński gasket	59
5.1	Motivation	60
5.2	The Euler functional and its analysis	61
5.3	Analysis of the map ϕ_u	64
5.4	Proof of the main results	71

6	A system of p-Laplacian equations on the Sierpiński gasket	81
6.1	Motivation	83
6.2	Euler functional $I_{\lambda,\gamma}$ and fibering map $\Phi_{u,v}$	85
6.3	Proof of the Main Results	96
7	Conclusion and Future directions	109
7.1	Conclusion	109
7.2	Future Directions	111
	Bibliography	113
	Bio-data	123

List of Figures

2.1	Sierpiński gasket	11
2.2	Harmonic functions	14
3.1	α -fractal functions with different scaling vector	35
3.2	Level-1 Sierpiński gasket($\mathcal{S}^{(1)}$)	36
3.3	α -fractal functions with different scaling vector	42
4.1	Possible forms of $\phi_u(t)$	51
5.1	Possible forms of M_u	66
5.2	Possible forms of ϕ_u	67
6.1	Possible forms of $M_{u,v}(t)$	88
6.2	Possible forms of $\Phi_{u,v}$	91

List of Tables

3.1	Box dimension bounds and max error for $f(x, y) = x^2 + y^2$	35
-----	--	----

List of Symbols

\mathbb{N}	the set of natural numbers
\mathbb{Z}	the set of integers
\mathbb{Q}	the set of rational numbers
\mathbb{R}	the set of real numbers
$N_\epsilon(A)$	ϵ -neighbourhood of set A
$d(x, A)$	distance between point and set A
$\mathcal{B}(X)$	collection of closed and bounded sets of X
$D_{\mathcal{H}}(\cdot, \cdot)$	Hausdorff metric
$\mathcal{H}^s(A)$	s -dimensional Hausdorff measure of a A
$\dim_H(A)$	Hausdorff dimension of A
$\underline{\dim}_B(A)$	lower box counting dimension of A
$\overline{\dim}_B(A)$	upper box counting dimension of A
$\dim_B(A)$	box counting dimension of A
\mathcal{S}_0	boundary of Sierpiński gasket
$\mathcal{S}^{(m)}$	m^{th} level Sierpiński gasket
\mathcal{S}	Sierpiński gasket
$\mathcal{C}(\mathcal{S})$	set of continuous functions from \mathcal{S} to \mathbb{R}
$E^{(m)}$	m^{th} level crude energy
$\mathcal{E}^{(m)}$	m^{th} level normalized energy

$E_p^{(m)}$	m^{th} level crude p -energy
$\mathcal{E}_p^{(m)}$	m^{th} level normalized p -energy
$\mathcal{E}_p(\cdot)$	p -energy function
$\mathcal{E}_p(\cdot, \cdot)$	p -energy form
$\text{dom}(\mathcal{E})$	set of all functions having finite energy
$\text{dom}_0(\mathcal{E})$	set of all functions vanishing on boundary with finite energy
$\text{dom}(\mathcal{E}_p)$	set of all functions having finite p -energy
$\text{dom}_0(\mathcal{E}_p)$	set of all functions vanishing on boundary with finite p -energy
$\ \cdot\ _1$	1-norm
$L^1(\mathcal{S}, \mu)$	collection of measurable functions with 1-norm finite
$\ \cdot\ _\infty$	supremum norm
$\ \cdot\ _{\mathcal{E}_p}$	\mathcal{E}_p norm
$\Sigma^{(m)}$	collection of all words of length m
Σ^*	collection of all words of finite length
f^α	α -fractal function corresponding to f
$\mathcal{N}(k)$	minimum number of cubes of size $\frac{1}{2^k} \times \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{2^k}$ which cover graph
$\mathbf{A}(k, \omega)$	collection of cubes of size $\frac{1}{2^k} \times \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{2^k}$
$\mathcal{N}(k, \omega)$	number of cubes in $\mathbf{A}(k, \omega)$.
■	$[0, 1] \times [0, 1]$.
$N_\delta(F)$	number of box required to cover set F
Δ_p	weak p -Laplacian
Ω	bounded connected domain
$\partial\Omega$	boundary of set Ω