COMPLETENESS AND SCHAUDER FRAMES OF TRANSLATES IN FUNCTION AND OPERATOR SPACES

BHAWNA

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI
JUNE 2024

COMPLETENESS AND SCHAUDER FRAMES OF TRANSLATES IN FUNCTION AND OPERATOR SPACES

by

BHAWNA

Department of Mathematics

Submitted

in fulfillment of the requirements of the degree of Doctor of Philosophy

to the

Indian Institute of Technology Delhi

June 2024

Dedicated to
My Father, My Light

Certificate

This is to certify that the thesis entitled **"Completeness and Schauder Frames of Translates in Function and Operator Spaces"** submitted by **Ms. Bhawna** to the Indian Institute of Technology Delhi, for the award of the Degree of **Doctor of Philosophy**, is a record of the original bona fide research work carried out by her under my supervision and guidance. The thesis has reached the standards fulfilling the requirements of the regulations relating to the degree.

The results contained in this thesis have not been submitted in part or full to any other university or institute for the award of any degree or diploma.

Date:
Place: New Delhi

Dr. S. Sivananthan
Associate Professor
Department of Mathematics
Indian Institute of Technology Delhi

Acknowledgments

First and foremost, I extend my deepest gratitude to my supervisor **Prof. S. Sivananthan**, whose unwavering guidance has been my compass throughout this academic odyssey. Patiently addressing every doubt, providing fresh perspectives on research and mathematics, and nurturing my analytical skills, they played a pivotal role in shaping my academic journey. Your mentorship not only shaped the academic trajectory of this thesis but also instilled in me a profound appreciation for the pursuit of knowledge.

My thanks also go out to all my professors who imparted knowledge and wisdom, contributing to my growth in understanding and appreciation of various subjects.

To The Almighty God, I express my profound gratitude for the grace that has paved the way for every opportunity in my life. Recognizing that without divine intervention, none of this would be possible, I am grateful for the unwavering support and guidance received. In moments of uncertainty and doubt, faith has been my anchor. I am grateful for the resilience and perseverance instilled through this spiritual connection.

My family, a pillar of strength, deserves my deepest appreciation. Special thanks to my father, whose dreams and aspirations for my academic achievements have fueled my determination. Their unwavering support has been a cornerstone, enabling me to reach new heights.

I owe a debt of gratitude to my dearest friends, particularly Archana and Bhavya, who have been steadfast companions on life's journey. Their support in decision-making, shared moments of joy, and shared burdens in times of sorrow have made this journey richer and more meaningful.

In the bustling community of my peers at IITD, I found a family. Together, we weathered the challenges of this lengthy journey, forming bonds that transcend the academic realm.

I would like to acknowledge my juniors Naveen, Ritika, Abhilash, Anshul, Shweta, Satyam, Himanshu, Kavin for their enthusiasm and fresh perspectives that added vibrancy to the academic atmosphere. Your curiosity and questions pushed me to delve deeper into a better person and into the subject matter.

Equally, my appreciation goes to my seniors whose insights and experiences were invaluable in navigating the complexities of academic research. Your guidance served as a compass, helping me navigate uncharted territories.

Equally significant is the support and guidance I received from my seniors Lipsy, Navneet, Dhiraj, Dr. Shivam. Their experiences and insights served as a roadmap through the intricate paths of academia. Their mentorship and camaraderie created a sense of belonging within the academic community. The shared journey with both juniors and seniors transformed the academic environment into a close-knit family, fostering an atmosphere of mutual support and growth.

To all my peers Neha, Ritesh, Vidyasagar, Kshitij, I extend my sincere appreciation for being an integral part of my academic and personal growth. Together, we have created a tapestry of shared experiences that will be etched in my memory forever.

Lastly, I express my gratitude for the tough times that molded me into a stronger individual. Each challenge, setback, and adversity has contributed to my growth, leaving an indelible mark on my character.

With sincere appreciation,

New Delhi Bhawna

Abstract

This thesis deals with the study of the system of translates of a fixed element in three different types of spaces: the Hardy space $H^1(\mathbb{R})$, Orlicz spaces $L^\Phi(\mathbb{R}^d)$ and the Schatten p-classes of operators $\mathcal{T}^p$.

The first is the Hardy space $H^1(\mathbb{R})$. First, we characterize those functions whose all translates are complete in terms of the zero set of their Fourier transform. Then we consider the completeness of systems generated by discrete translates. We characterize all the discrete sets $\Lambda \subset \mathbb{R}$ in $H^1(\mathbb{R})$ for which there exists a function whose Λ-translates are complete. These sets are precisely those whose Beurling-Malliavin density is infinite. As a result, uniformly discrete translates of a single function can never be complete. However, we show that the situation is different if we take system of translates of two functions. By taking Λ to be a very small perturbation of integers, there exists a pair of functions such that their Λ-translates are complete in $H^1(\mathbb{R})$.

The second are the Orlicz spaces $L^\Phi(\mathbb{R})$. We study the completeness and Schauder frames properties of system of translates in these spaces based on the properties of the corresponding Orlicz function Φ. For Orlicz functions spaces satisfying $\Phi \in \Delta_2$ with $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{x} > 0$, we prove an analogue of the Wiener-Tauberian theorem characterizing those functions in the space $L^\Phi(\mathbb{R})$ whose all translates. For Orlicz functions spaces satisfying $\Phi \in \Delta_2$ with $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = 0$, we prove the completeness of all translates of a simple step function in the corresponding Orlicz space. Next we prove an inclusion result on the completeness of translates for the Orlicz functions in the Δ_2 class. We show that a particular partial order of the Orlicz functions, the existence of a function in one Orlicz space whose Λ-translates are complete will imply the same in another. Lastly, we prove the existence of Schauder frames of translates for Orlicz spaces in the $\Delta^{'}$ class by comparing them with x^2 under a different partial order. We also show that by imposing auxiliary conditions on Φ, we can obtain additional properties in the frame structure such as unconditionality and the existence of a subsequence with semi-normalized coordinates which is also an unconditional Schauder frame.

The third are the Schatten p-class $\mathcal{T}^p$ which are operator spaces on the Hilbert space $L^2(\mathbb{R}^d)$. We study the completeness and frame properties of systems of the form $\{\alpha_\lambda S\}_{\lambda\in\Lambda}$ in the space $\mathcal{T}^p$ where $\alpha_\lambda S$ denote the translation of the operator S by λ and $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^{2d}$ is discrete. We consider the completeness of a system of discrete translates in $\mathcal{T}^p$ for all $p > 1$. We give an example of a uniformly discrete $\Lambda \subset \mathbb{R}^{2d}$ such that there exists an operator whose Λ-translates are complete in $\mathcal{T}^p$ for all $p > 1$. Then we study Schauder frames of translates in $\mathcal{T}^p$. For all $p > 2$, we established the existence of operators whose integer translates give rise to unconditional Schauder frames in $\mathcal{T}^p$.

सार

यह थीसिस तीन अलग-अलग प्रकार के स्पेस में एक निश्चित तत्व के ट्रान्सलेट्स की प्रणाली के अध्ययन से संबंधित है: हार्डी स्पेस $H^1(\mathbb{R})$, ऑर्लिक स्पेस $L^\Phi(\mathbb{R}^d)$ और ऑपरेटरों के शैटन p-क्लास $\mathcal{J}^p$। हम इन स्पेस में ट्रान्सलेट्स की प्रणाली की पूर्णता और शॉडर फ्रेम गुणों का अध्ययन करते हैं। किसी $\lambda \in \mathbb{R}$ द्वारा $\mathbb{R}$ पर एक फ़ंक्शन f का ट्रान्सलेट $\tau_\lambda f(\cdot) := f(\cdot - \lambda)$ के रूप में परिभाषित किया गया है। मान लें कि X ट्रान्सलेट्स के संबंध में $\mathbb{R}$ पर फ़ंक्शनों का एक इंवरिएंट टोपोलॉजिकल स्पेस है (यानी, यदि $f \in X$, तो सभी $\lambda \in \mathbb{R}$ के लिए $\tau_\lambda f \in X$)। हम यह जानने में रुचि रखते हैं कि क्या X में सभी फ़ंक्शन मनमाने ढंग से अच्छी तरह से सन्निकट किए जा सकते हैं या निश्चित फ़ंक्शन $f \in X$ के कुछ ट्रान्सलेट्स के रैखिक संयोजनों द्वारा विघटित किए जा सकते हैं? किसी $\Lambda \subset \mathbb{R}$ के लिए, हम कहते हैं कि $f \in X$ के Λ-ट्रान्सलेट X में पूर्ण हैं यदि $\{\tau_\lambda f\}_{\lambda \in \Lambda}$ का लीनियर स्पान पूरे स्पेस X में घना है।सेपरबल बनाच स्पेस X के लिए, इसके द्वैत को X^* द्वारा निरूपित करें। एक अनुक्रम $\{f_n, f_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \times X^*$ को Xके लिए शाउडर फ्रेम कहा जाता है यदि $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^*(f) f_n$ सभी $f \in X$ के लिए। एक शाउडर फ्रेम को अनकंडीशनल शाउडर फ्रेम कहा जाता है यदि उपरोक्त समीकरण में अभिसरण प्रत्येक $f \in X$ के लिए अनकंडीशनल है।

पहला हार्डी स्पेस $H^1(\mathbb{R})$ है। सबसे पहले, हम उन फ़ंक्शन को चिह्नित करते हैं जिनके सभी ट्रान्सलेट्स पूर्ण हैं, यह हम उनके फूरियर ट्रांसफ़ॉर्म के शून्य सेट के संदर्भ में करते हैं । फिर हम डिस्क्रीट ट्रान्सलेट्स द्वारा उत्पन्न प्रणालियों की पूर्णता पर विचार करते हैं। हम $H^1(\mathbb{R})$ में सभी डिस्क्रीट सेट $\Lambda \subset \mathbb{R}$ को चिह्नित करते हैं जिसके लिए एक फ़ंक्शन मौजूद है जिसके Λ-ट्रान्सलेट्स पूर्ण हैं। ये सेट ठीक वही हैं जिनका ब्यूरलिंग-मैलियाविन घनत्व अनंत है। परिणामस्वरूप, एकल फ़ंक्शन के समान रूप से डिस्क्रीट ट्रान्सलेट्स कभी भी पूर्ण नहीं हो सकते। हालाँकि, हम दिखाते हैं कि यदि हम दो फ़ंक्शन के ट्रान्सलेट्स की प्रणाली लेते हैं तो स्थिति अलग होती है। यदि हम Λ को इंतेजर्स का एक बहुत छोटा पेर्तुरबशन मानें, तो फ़ंक्शनों की एक जोड़ी मौजूद होती है, जिनके Λ-ट्रान्सलेट्स $H^1(\mathbb{R})$ में पूर्ण होते हैं।

दूसरे हैं ऑर्लिकज़ स्पेस $L^\Phi(\mathbb{R}^d)$। हम संबंधित ऑर्लिकज़ फ़ंक्शन Φ के गुणों के आधार पर इन स्पेस में ट्रान्सलेट्स की प्रणाली की पूर्णता और शॉडर फ्रेम गुणों का अध्ययन करते हैं। $\lim_{x\to 0} \frac{\Phi(x)}{x} > 0$ के साथ $\Phi \in \Delta_2$ को संतुष्ट करने वाले

ऑर्लिकज़ फ़ंक्शन स्पेस के लिए, हम $L^{\Phi}(\mathbb{R})$ स्पेस में उन फ़ंक्शन को चिह्नित करने वाले जिनके सभी ट्रान्सलेट्स होते हैं। $lim_{x\to 0}\frac{\Phi(x)}{x} = 0$ के साथ $\Phi \in \Delta_2$ को संतुष्ट करने वाले ऑर्लिकज़ फ़ंक्शन स्पेस के लिए, हम संबंधित ऑर्लिकज़ स्पेस में एक सरल स्टेप फ़ंक्शन के सभी ट्रान्सलेट्स की पूर्णता साबित करते हैं। इसके बाद हम Δ_2 क्लास में ऑर्लिकज़ फ़ंक्शन के लिए ट्रान्सलेट्स की पूर्णता पर एक समावेशन परिणाम साबित करते हैं। हम दिखाते हैं कि ऑर्लिकज़ फ़ंक्शन
का एक विशेष आंशिक क्रम, एक ऑर्लिकज़ स्पेस में फ़ंक्शन का अस्तित्व जिसके Λ-ट्रान्सलेट्स पूर्ण हैं, दूसरे में भी यही संकेत देगा। अंत में, हम Δ' वर्ग में ऑर्लिकज़ स्पेस के लिए ट्रान्सलेट्स के शॉडर फ़्रेम के अस्तित्व को एक अलग आंशिक क्रम के तहत x^2 के साथ तुलना करके साबित करते हैं। हम यह भी दिखाते हैं कि Φ पर सहायक शर्तें लगाकर, हम फ़्रेम संरचना में अतिरिक्त गुण प्राप्त कर सकते हैं जैसे अनकंडीशनल और अर्ध-सामान्यीकृत निर्देशांक के साथ एक उप-अनुक्रम का अस्तित्व जो एक अनकंडीशनल शॉडर फ़्रेम भी है।

तीसरे हैं शैटन p-क्लास $\mathcal{T}^p$ जो हिल्बर्ट स्पेस $L^2(\mathbb{R}^d)$ पर ऑपरेटर स्पेस हैं। हम $\mathcal{T}^p$ स्थान में $\{\alpha_\lambda S\}_{\lambda\in\Lambda}$ के रूप की प्रणालियों की पूर्णता और फ़्रेम गुणों का अध्ययन करते हैं, जहाँ $\alpha_\lambda S$ ऑपरेटर S के λ द्वारा ट्रान्सलेट को दर्शाता है और $\Lambda\subset\mathbb{R}^{2d}$ डिस्क्रीट है। हम सभी $p > 1$ के लिए $\mathcal{T}^p$ में डिस्क्रीट ट्रान्सलेट्स की एक प्रणाली की पूर्णता पर विचार करते हैं। हम एक समान रूप से डिस्क्रीट $\Lambda\subset\mathbb{R}^{2d}$ का उदाहरण देते हैं, जैसे कि एक ऑपरेटर मौजूद है जिसके Λ-ट्रान्सलेट्स सभी $p > 1$ के लिए $\mathcal{T}^p$ में पूर्ण हैं। फिर हम $\mathcal{T}^p$ में ट्रान्सलेट्स के शॉडर फ़्रेम का अध्ययन करते हैं। सभी $p > 2$ के लिए, हमने उन ऑपरेटरों का अस्तित्व स्थापित किया है जिनके पूर्णांक ट्रान्सलेट्स $\mathcal{T}^p$ में अनकंडीशनल शॉडर फ़्रेम को जन्म देते हैं।

Contents

List of Tables

List of Symbols

Symbol	Meaning
$\tau_\lambda f$	The translate of the function f by λ.
$\alpha_\lambda S$	The translate of the operator S by λ.
ℓ^p	The space of p-summable sequences.
$L^p(\mathbb{R}^d)$	The d-dimensional Lebesgue space.
$H^1(\mathbb{R})$	The Hardy space.
$BMO(\mathbb{R})$	The space of all functions with bounded mean oscillations.
$L^\Phi(\mathbb{R}^d)$	The d-dimensional Orlicz space corresponding to the Orlicz function Φ.
$\mathcal{T}^p$	The Schatten p-class of operators.
$\|I\|$	Length of the interval I.
$\#(A)$	Cardinality of the set A.
$\mathbb{Z}_+$	The set of all positive integers.
$C_0(\mathbb{R})$	The space of all continuous functions vanishing at infinity.
$C_c^\infty(\mathbb{R})$	The space of all infinite differentiable functions with compact support.
$\mathcal{S}(\mathbb{R})$	The Schwartz space of functions on $\mathbb{R}$.
$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$	The space of all tempered distributions on $\mathbb{R}$.
$\mathcal{S}_{op}(\mathbb{R})$	The space of all Schwartz operators.
$\mathcal{S}'_{op}(\mathbb{R})$	The space of all tempered operators.
$D_{BM}(\Lambda)$	The Beurling-Malliavin density of the set Λ.
X^*	The dual of a Banach space X.
$\Delta_2, \Delta', \nabla_2$	Certain subclasses of Orlicz functions.

$\hat{A}$	The collection of all continuous homomorphisms from a normed algebra A to $\mathbb{C}$.
$\check{F}$	The inverse Fourier transform of a function F.
$spec(\phi)$	The support of the Fourier transform of ϕ for $\phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
$SL(n, \mathbb{K})$	The special linear group of dimension n with entries from the field $\mathbb{K}$.
$SO(p, q)$	The special orthogonal group.
$Sp(2n, \mathbb{K})$	The symplectic group of dimension n with entries from the field $\mathbb{K}$.
$T(n, \mathbb{R})$	The group of all upper triangular matrices in $\mathbb{R}$ with ones on the diagonal.
$GL(n, \mathbb{K})$	The general linear group with entries from the field $\mathbb{K}$.