PSEUDO-DIFFERENTIAL AND LOCALIZATION OPERATORS ON GROUPS

SANTOSH KUMAR NAYAK

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI
MARCH 2023

PSEUDO-DIFFERENTIAL AND LOCALIZATION OPERATORS ON GROUPS

by

SANTOSH KUMAR NAYAK

Department of Mathematics

Submitted

in fulfillment of the requirements of the degree of Doctor of Philosophy

to the

Indian Institute of Technology Delhi

MARCH 2023

Dedicated to my parents.

Certificate

This is to certify that the thesis entitled **Pseudo-Differential and Localization Operators on Groups** submitted by **Santosh Kumar Nayak** to the Indian Institute of Technology, Delhi, for the award of the degree of **Doctor of Philosophy** is a record of the original bonafide research work carried out by him under my supervision and guidance. The thesis has reached the standards fulfilling the requirements of the regulations relating to the degree.

The results contained in this thesis have not been submitted in part or full to any other University or Institute for the award of any degree or diploma.

New Delhi

March 2023

Dr. Aparajita Dasgupta

Assistant Professor

Department of Mathematics

Indian Institute of Technology Delhi

New Delhi 110016

Acknowledgements

I wish to acknowledge all the people whose support and guidance put me in a position to write a thesis.

First and foremost, I would like to thank my Ph.D. supervisor, Aparajita Dasgupta, for introducing me to this fascinating area of mathematics, and for her skillful supervision she has given over the last four years. Her brilliant supervision, patience, enthusiasm, and cooperation enriched this study beyond my expectations. Also, she continues to motivate me to do research in the future. It would not have been possible to write the doctoral thesis without her.

I am indebted to my favourite teacher, "Samal Sir," who encouraged and motivated me during my undergraduate time to do mathematics.

I offer my sincere gratitude to Prof. J. Patel, Prof. N. Das, Prof. N. R. Sathpathy, Prof. P. Gochhayat and Prof. S. Sahu, for their enormous help and support during my M.Sc. and M.Phil. I will always remember, Prof. J. Patel's way of teaching, and Prof. N. Das's way of approaching mathematics questions. I would like to extend my sincere gratitude to Prof. M. W. Wong for his beautiful lectures on "Pseudo-Differential Operators" during pandemic time.

I would also like to express my appreciation towards SRC members for their valuable comments to improve my work.

I am excited to thank all my friends, from school days until today, who have joined in the journey of life during the ups and downs. Very special thanks to my teammates S. S. Mondal, A. Tushir, Lalit Mohan, A. Poria, and S. Paul for their help and support during my research period. I would not have been able to reach this level of accomplishment without the support and motivation of my Ph.D. batch mates, my special and heartfelt thanks to them.

I would also like to thank IIT Delhi for providing me financial assistance throughout these years.

Last but not least, I would like to thank my family members for everything they have done for me. My parents have always supported me in both good and bad times. They have always encouraged me and done everything they could to make sure I did not have to worry about anything else when I had to study.

New Delhi Santosh Kumar Nayak

2023

Abstract

This thesis is a study of pseudo-differential operators (ΨDOs) on the affine group, similitude group (polar affine group) and affine Poincaré group, and localization operators on the Poincaré unit disk, and reduced Heisenberg group with multidimensional center. Moreover, we verify the boundedness and unbounded of the Weyl transform on the reduced Heisenberg group with multidimensional center.

Pseudo-differential operators (ΨDOs) are generalized partial differential operators on $\mathbb{R}^n$, and they are obtained using the Euclidean Fourier transform on $\mathbb{R}^n$. These operators are associated to a symbol function (or distribution) on $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. The association of symbol with an operator is called Kohn-Nirenberg quantization, in which the Euclidean Fourier transform is involved. In this thesis, we adopt the Kohn-Nirenberg quantization process to associate the operator-valued symbol with a global pseudo-differential operator on the affine group, similitude group, affine Poincaré group using the group Fourier transform, and study these operators in separate chapters. Furthermore, by substituting appropriate conditions on the operator-valued symbol we obtain L^p-boundedness. We also provide a necessary and sufficient conditions on the operator-valued symbol to prove that the corresponding pseudo-differential operator is in the Hilbert-Schmidt class. Consequently, we obtain a characterization of trace class pseudo-differential operators on the affine group, similitude group, affine Poincaré group, and provide a trace formula for these trace class operators.

In the quantization process, the contribution of Weyl transform is very impactful in quantum physics. On $\mathbb{R}^n$, Weyl transform (operator) is a self-adjoint pseudo-differential operator. In this thesis we construct the Weyl transform, on the affine group, similitude group (polar affine group), affine Poincaré group and reduced Heisenberg group with multidimensional center, associated to the Wigner transform. We investigate the boundedness of Weyl transform, on these four groups, in separate chapters. Moreover, the unboundedness of Weyl transform, on

the reduced Heisenberg group with multidimensional center, is derived here.

We have studied another class of pseudo-differential operators, on $\mathbb{R}^n$, namely localization operators, which are also known as anti-wick pseudo-differential operators. We study these operators using square integrable representations. We investigate localization operators on the Poincaré unit disk and reduced Heisenberg group with multidimensional center. Moreover, we associate localization operators, on Poincaré unit disk, with operators like paracommutator, paraproduct and Fourier multiplier. Finally, the product formula of localization operators are obtained for the reduced Heisenberg group with multidimensional center.

सार

यह थीसिस एफाइन ग्रुप, सिमिलिट्यूड ग्रुप (पोलर एफाइन ग्रुप), और एफाइन पॉइंकार'ई ग्रुप पर स्यूडो-डिफरेंशियल ऑपरेटर्स (ψDOs) का अध्ययन है, और पॉइंकार'ई यूनिट डिस्क और रेडूसेड हाइजेनबर्ग ग्रुप विथ मुलतीदीमेंसिओनल सेंटर पर स्थानीयकरण ऑपरेटरों का अध्ययन है। इसके अलावा, हम रेडूसेड हाइजेनबर्ग ग्रुप विथ मुलतीदीमेंसिओनल सेंटर पर वीइल ट्रांसफॉर्म की सीमा और असीमितता को सत्यापित करते हैं।

R^n पर सूडो-डिफरेंशियल ऑपरेटर्स पार्शियल डिफरेंशियल ओपेरटोरोंका जेनेरलिज़तिओन है , और उन्हें यूक्लिडियन फूरियर ट्रांसफॉर्म का उपयोग करके प्राप्त की जाती हैं। ये ऑपरेटर Rn × Rn पर एक सिंबल फंक्शन (या डिस्ट्रीब्यूशन) से जुड़ा हुआ है। एक ऑपरेटर के साथ एक सिंबल का सहयोग को कोह्न-निरेनबर्ग क्वान्टिजेशन कहा जाता है, जिसमें यूक्लिडियन फूरियर ट्रांसफॉर्म शामिल होता है। इस थीसिस में, ऑपरेटर-वैल्यूड सिंबल के साथ ग्लोबल सूडो-डिफरेंशियल ऑपरेटर अफ्फिने ग्रुप पर , सिमिलिटूड ग्रुप पर , अफ्फिने पॉइंकार'ई ग्रुप पर सम्बन्ध बनाने केलिए ग्रुप फूरियर ट्रांसफॉर्म का उपयोग करते हुए, हम कोह्न-निरेनबर्ग क्वान्टिजेशन प्रक्रिया को अपना रहे हैं, और इन ऑपरेटरों का अध्ययन अलग-अलग अध्यायों में कररहे है। इसके अलावा, ऑपरेटर-वैल्यूड सिंबल पर उपयुक्त शर्तों को प्रतिस्थापित करके हम Lp-बॉण्डेड प्राप्त कर रहे हैं। सूडो-डिफरेंशियल ऑपरेटर हिल्बर्ट-श्मिट वर्ग में रहने केलिए हम ऑपरेटर-वैल्यूड सिंबल पर एक आवश्यक और पर्याप्त शर्तें भी प्रदान कर रहे है। नतीजतन, हम अफ्फिने ग्रुप, सिमिलिटूड ग्रुप, अफ्फिने पोइन्कारे ग्रुप पर ट्रेस क्लास स्यूडो-डिफरेंशियल ऑपरेटरों का एक लक्षण वर्णन प्राप्त कर रहे हैं, और इन ट्रेस क्लास ऑपरेटरों का एक ट्रेस फॉर्मूला प्रदान कर रहे है।

क्वांटिज़ेशन प्रक्रिया में, वेइल ट्रांसफ़ॉर्म का योगदान क्वांटम फिजिक्स में बहुत प्रभावशाली है। R^n पर, वेइल ट्रांसफॉर्म (ऑपरेटर) एक सेल्फ-एडजॉइन्ट सूडो-डिफरेंशियल ऑपरेटर है। इस थीसिस में हम एफाइन ग्रुप, सिमिलिट्यूड ग्रुप (पोलर एफ़िन ग्रुप), एफ़िन पोंकारे ग्रुप और रिड्यूस्ड हाइजेनबर्ग ग्रुप विथ मुलतीदीमेंसिओनल सेण्टर पर ब वेइल ट्रांसफ़ॉर्म का निर्माण करते हैं, विग्नर ट्रांसफॉर्म के साथ। अलग-अलग अध्यायों में, हम वीइल ट्रांसफॉर्म की सीमा की जांच कर रहे हैं ये चार ग्रुप पर । इसके अलावा, रेडूसेड हाइजेनबर्ग ग्रुप विथ मुलतीदीमेंसिओनल सेण्टर पर भी वेइल ट्रांसफॉर्म की असीमता यहां निकली गई है।

हमने Rn पर स्यूडो-डिफरेंशियल ऑपरेटर्स के एक अन्य वर्ग का अध्ययन किया है, जिसका नाम स्थानीयकरण (लोकलाइजेशन) ऑपरेटर्स है, जिन्हें एंटी-विक स्यूडो-डिफरेंशियल ऑपरेटर्स के रूप में भी जाना जाता है। हम इन ऑपरेटरों का स्क्वायर इंटेग्राब्ले रेप्रेसेंटेशन्स का उपयोग करके अध्ययन कर रहे हैं। हम पोइन्कारे यूनिट डिस्क और रेडूसेड हाइजेनबर्ग ग्रुप विथ मुलतीदीमेंसिओनल सेण्टर के साथ स्थानीयकरण ऑपरेटरों की जांच कर रहे हैं। इसके अलावा, हम पॉइनकेयर यूनिट डिस्क पर स्थानीयकरण ऑपरेटरों को परकम्यूटेटर, परप्रोडक्ट एंड फॉरिएर मल्टीप्लायर के साथ जोड़ रहे हैं। अंत में, रेडूसेड हैसेंबेर्ग ग्रुप विथ मुलतीदीमेंसिओनल सेण्टर पर स्थानीयकरण ऑपरेटरों का उत्पाद सूत्र प्राप्त किया है।

Contents

List of Symbols

$\mathbb{R}$	Set of Real numbers
$\mathbb{Z}$	Set of Integers
$\mathbb{N}$	Set of Natural numbers
$\mathbb{R}^n$	n-dimensional Cartesian Product of $\mathbb{R}$
$\in$	Belongs to
$\subset$	Subset
$\forall$	For all
$(\cdot)^\intercal$	Transpose of a vector (or a matrix)
U	Affine group
$\mathbb{SIM}(2)$ or $\mathbb{PU}$	Similitude Group(Polar affine group)
$\mathcal{P}_{\text{aff}}$	Affine Poincaré group
$\mathbb{D}$	Poincaré unit disk
$S_r, 1 \leq r \leq \infty$	Schatten class
$\mathcal{HS}$ or S_2	Hilbert-Schmidt class
$\mathcal{H}$	Hilbert space
$\mathcal{G}$	Reduced Heisenberg group with multidimensional center
$\mathcal{H}^m$	The non-isotropic Heisenberg group with m-dimensional center