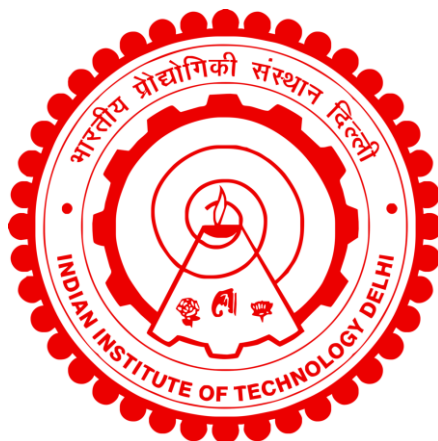


**EXPLORING PRICING STRATEGIES FOR VARIABLE ANNUITIES:
ASSESSING THE COST AND BENEFITS OF EMBEDDED
GUARANTEES FOR ENHANCED FINANCIAL SECURITY**

SHAKTI SINGH



**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI
OCTOBER 2024**

© Indian Institute of Technology Delhi (IITD), New Delhi, 2024

Exploring Pricing Strategies for Variable Annuities: Assessing the Cost and Benefits of Embedded Guarantees for Enhanced Financial Security

by

SHAKTI SINGH

Department of Mathematics

*Submitted
in fulfillment of the requirements of the degree of
Doctor of Philosophy
to the*



**Indian Institute of Technology Delhi
October 2024**

*Dedicated to
my Tau ji & Father*

Certificate

This is to certify that the thesis entitled **Exploring Pricing Strategies for Variable Annuities: Assessing the Cost and Benefits of Embedded Guarantees for Enhanced Financial Security** submitted by **Mr. SHAKTI SINGH** to the **Indian Institute of Technology Delhi**, for the award of the degree of **Doctor of Philosophy**, is a record of the original bonafide research work carried out by him under my supervision and guidance. The thesis has reached the standards fulfilling the requirements of the regulations relating to the degree. The results contained in this thesis have not been submitted in part or full to any other university or institute for the award of any degree or diploma.

New Delhi
October 2024

Prof. S. Dharmaraja
Department of mathematics,
Indian Institute of Technology Delhi

Acknowledgments

This thesis marks the end and beginning of many things in my life. The conclusion results from many hours of hard work, feeling lost and finding myself again. When I started on the unknown road to my Ph.D., my destination was only vaguely known to me. The process of getting closer to my destination has been an exciting and sometimes lonely journey. My research advisor, colleagues, family and friends have played an essential role in ensuring that I continue on this road. With deep gratitude, I would like to thank the people without whom this thesis would not have been possible.

First, I express my sincere gratitude to my advisor, Prof. S. Dharmaraja, for their exceptional mentorship, wisdom, and expertise. His dedication to my academic growth, insightful feedback, and constant encouragement have been invaluable in shaping the outcome of this research. I am truly grateful for their guidance and belief in my capabilities.

I would also like to thank my SRC (Student Research Committee) members: Prof. Vikas Vikram Singh (Mathematics Department), Prof. Nomesh Bolia (Mechanical Engineering Department), and Prof. Ananta K. Majee (Mathematics Department) for their useful suggestions and for sharing their time and knowledge during my Ph.D.. I am grateful to the Department of Mathematics and IIT Delhi authorities for the financial support during my research period and for providing me with all the other facilities needed to complete my Ph.D.

I would also like to acknowledge Prof. Viswanathan Arunachalam, Prof. Selvaraju Natarajan, and Prof. Guglielmo D'Amico for their valuable contributions to my thesis. Their expertise and their willingness to share their knowledge have enriched my understanding of the subject matter. I am

grateful for their thought-provoking discussions that have sparked new ideas and perspectives and their invaluable guidance in refining my research methodology.

I would like to use this platform to thank the wonderful people I met during my Ph.D. and who made this entire learning experience at IIT Delhi productive and fun. I want to thank my friend Dr. Nitin Kumar and Sarfraz. I would like to extend my gratitude to my colleagues Priya, Shamiksha, Utpal and my senior colleagues Dr. Anisha and Dr. Raina raj for their friendly assistance. I would also like to extend my appreciation to my dear friend Nakul Vashisht for his constant motivation during hard times.

Above all, I would like to thank my parents, Shyam Singh Kadian, Anita Rani, and Raj Singh Kadian, for their love, blessings, support, encouragement, sacrifice, and unwavering belief in me. Without them, I would not be the person I am today. Thank you for always being there with me. I also acknowledge my elder brother Arun Kadian, Deepak Kadian, Anuj Kadian, and elder sister Nidhi Kadian for their unconditional love and support.

Finally, I would like to thank the Almighty, who has blessed me with an abundance of opportunity and good fortune.

New Delhi

SHAKTI SINGH

Abstract

People always look for strategies to protect their financial future while minimizing personal finance and retirement planning risks. Variable Annuities have long been understood to provide a solid income source for retirees. This is because it guarantees a consistent stream of payments over a specified period or for the duration of an individual's lifetime. Moreover, contractual arrangement in a variable annuity is characterized by a variable value that is dependent on the performance of a portfolio consisting of sub-accounts. On the other hand, variable annuity consists of various embedded options/guarantees provided by the insurer, which provide stability and safety as the policyholder approaches retirement.

This thesis focuses on the pricing of variable annuities that include a range of advantages. We have concentrated on several types of retirement benefits and lifetime assurances. We utilized asymmetric GARCH models to incorporate the volatility of the returns of the index and the rate of interest returns, taking into consideration the surrender benefit and the dynamic withdrawal method. Furthermore, we have assessed a variable annuity product, which includes both health status and hospitalization coverage benefits, as well as the GLWB (Guaranteed lifetime withdrawal benefit). This product operates within a framework that combines a one-dimensional and inflation-linked multi-dimensional sub-account structure, where the value of the fund is determined by a collection of interconnected assets. We have utilized real option pricing to analyze an investment-disinvestment dilemma in a variable annuity product that encompasses the GLWB and health status advantages.

We started by reviewing some literature and a brief introduction about variable annuity and various embedded guarantees, which play a crucial role in the following chapters. First, we have used the generalized GARCH models with surrender benefit and dynamic withdrawal strategy to develop a time series model for the pricing of annuity to capture all the “stylized” facts present in the returns.

We have also developed and assessed a novel insurance offering, specifically the variable annuity plan, which includes the health status and the GLWB. As a result of particular challenges, the health insurance sector has become one of the most precarious industries. This phenomenon can be attributed to the increasing age of the population and the escalating expenses of medical services due to developments in technology. Therefore, a fundamental requirement in the health insurance industry is to develop an innovative product. A model that combines continuous and discrete time, with constant volatility and interest rate, is proposed to determine the fair fee of the product. The fair fee is derived based on the equilibrium condition between the premium and benefits. We took into account the consistent level of volatility and interest rates, as well as the benefits related to health status and coverage for hospitalization. To demonstrate the effectiveness of this product and explore potential enhancements, numerical and sensitivity analysis have been performed. The findings indicated that both the amount of withdrawal and the age of the individual have a substantial influence on the cost. An increase in the minimum age at which one can be insured and the amount that can be withdrawn initially leads to a higher price for the product. The withdrawal amount encompasses both the guaranteed amount and medical expenses of the GLWB rider.

Conventional annuities sometimes lack adaptability and do not adequately account for the diverse requirements of individuals, especially in terms of healthcare expenses. We have examined the impact of the policyholder's health condition on the most advantageous moment for the policyholder to cease paying premiums that are dependent on their health and begin receiving benefits from a variable annuities contract that includes a GLWB. A hybrid continuous-discrete time model is formulated to determine the ideal timing for initiating a withdrawal phase. The model establishes the investment and disinvestment triggers based on market conditions, considering both dynamic and static scenarios. In the static scenario, the optimal time is calculated at the moment when the policy is first established. On the other hand, in the dynamic scenario, the best time to start is determined by repeatedly calculating the exercise frontier of an actual deferral option.

Variable annuities typically utilize single-asset models for pricing, hedging, and fee analysis despite the fact that guarantees usually incorporate multiple assets. This practical solution poses challenges, including the potential for basis risk. We examined the use of inflation-linked variable annuities (IL-VAs) with GLWB using a sophisticated quantitative model. More precisely, we have examined a framework that involves multiple dimensions and sub-accounts, where the value of the fund is determined by a collection of interconnected assets. In addition, the research has included Markovian health benefits, which enhances the complexity of the modeling. A hybrid discrete-continuous time model is suggested to determine the equitable fee of the product by considering the balance between

premiums and benefits. A quadratic utility optimization problem has been formulated to maximize the sub-account fund value of an insurance firm while maintaining a certain level of risk. An empirical analysis and sensitivity evaluation was conducted to show the potential of this financial instrument and examine possible improvements. A comprehensive comparative study was also undertaken, comparing an existing model that incorporates only one high-risk asset and does not consider the benefits of inflation.

In addition, we have examined two crucial elements in the field of financial planning: the insurer's strategic reduction of fees using a Q-learning framework, and the evaluation of the fair fee structure embedded in the contract. The Finite-Horizon Q-Learning technique is employed to effectively minimize the charge from the insurer's perspective, taking into account the health and market returns. The Heston model is used to represent the value of a fund. Additionally, our model offered Financial Security Benefits (FSB) to the policyholder, which includes benefits for both the survivor and the children. A numerical research is conducted to showcase the capabilities of this financial solution and to examine possible improvements. A comparative analysis was conducted using an established model that had fixed costs and did not include the FSB. The study found that cutting fees based on health and the Volatility Index (VIX), which is a real-time index that represents the market's expectations for the relative strength of near-term price changes of the S&P 500 Index (SPX) enhances the advantages and reduces the likelihood of lapsation for the product.

सार

लोग हमेशा व्यक्तिगत वित्त और सेवानिवृत्ति योजना के जोखिमों को कम करते हुए अपने वित्तीय भविष्य की सुरक्षा के लिए रणनीतियों की तलाश में रहते हैं। परिवर्तनीय वार्षिकियां लंबे समय से सेवानिवृत्त व्यक्तियों के लिए एक ठोस आय स्रोत के रूप में समझी जाती हैं, क्योंकि यह एक निर्दिष्ट अवधि या व्यक्ति के जीवनकाल के दौरान सतत आय प्रवाह की गारंटी देती हैं। इसके अलावा, एक परिवर्तनीय वार्षिकी की संविदात्मक व्यवस्था में एक परिवर्तनीय मूल्य की विशेषता होती है, जो उप-खातों वाले पोर्टफोलियो के प्रदर्शन पर निर्भर करती है। दूसरी ओर, परिवर्तनीय वार्षिकी में बीमाकर्ता द्वारा प्रदान किए गए विभिन्न एम्बेडेड विकल्प/गारंटी शामिल होते हैं, जो पॉलिसीधारक को सेवानिवृत्ति के करीब पहुंचने पर स्थिरता और सुरक्षा प्रदान करते हैं।

यह थीसिस परिवर्तनीय वार्षिकी के मूल्य निर्धारण पर केंद्रित है, जिसमें कई प्रकार के लाभ शामिल हैं। हमने विभिन्न सेवानिवृत्ति लाभों और आजीवन आशवासनों पर ध्यान केंद्रित किया है। समर्पण लाभ और गतिशील निकासी पद्धति को ध्यान में रखते हुए, सूचकांक के रिटर्न की अस्थिरता और ब्याज दर को शामिल करने के लिए हमने असममित GARCH मॉडल का उपयोग किया है। इसके अलावा, हमने एक परिवर्तनीय वार्षिकी उत्पाद का मूल्यांकन किया है, जिसमें स्वास्थ्य स्थिति और अस्पताल में भर्ती कवरेज लाभ, साथ ही GLWB (गारंटीयुक्त आजीवन निकासी लाभ) दोनों शामिल हैं। यह उत्पाद एक ऐसे ढांचे के भीतर काम करता है, जो एक-आयामी और मुद्रास्फीति से जुड़े बहु-आयामी उप-खाता संरचना को जोड़ता है, जहां फंड का मूल्य परस्पर जुड़ी संपत्तियों के संग्रह द्वारा निर्धारित किया जाता है। हमने जीएलडब्ल्यूबी और स्वास्थ्य स्थिति लाभ शामिल करने वाले परिवर्तनीय वार्षिकी उत्पाद में निवेश-विनिवेश दुविधा का विश्लेषण करने के लिए वास्तविक विकल्प मूल्य निर्धारण का उपयोग किया है।

हमने कुछ साहित्य की समीक्षा की और परिवर्तनीय वार्षिकी तथा विभिन्न एम्बेडेड गारंटियों के बारे में एक संक्षिप्त परिचय देकर शुरुआत की, जो निम्नलिखित अध्यायों में महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। सबसे पहले, हमने सरेंडर लाभ और गतिशील निकासी रणनीति के साथ सामान्यीकृत GARCH मॉडल का उपयोग करके एक समय श्रृंखला मॉडल विकसित किया है, ताकि रिटर्न में मौजूद सभी "शैलीगत" तथ्यों को शामिल करते हुए वार्षिकी का मूल्य निर्धारण किया जा सके।

हमने एक नवीन बीमा पेशकश, विशेष रूप से परिवर्तनीय वार्षिकी योजना का भी विकास और मूल्यांकन किया है, जिसमें स्वास्थ्य स्थिति और GLWB (गारंटीयुक्त आजीवन निकासी लाभ) शामिल हैं। विशेष चुनौतियों के कारण, स्वास्थ्य बीमा क्षेत्र सबसे अनिश्चित उद्योगों में से एक बन गया है। इस स्थिति को जनसंख्या की बढ़ती उम्र और प्रौद्योगिकी में विकास के चलते चिकित्सा सेवाओं के बढ़ते खर्चों के लिए जिम्मेदार ठहराया जा सकता है। इसलिए, स्वास्थ्य बीमा उद्योग में एक मूलभूत आवश्यकता है कि एक नवीन उत्पाद विकसित किया जाए। उत्पाद का उचित मूल्य निर्धारण करने के लिए एक ऐसा मॉडल प्रस्तावित किया गया है, जो निरंतर अस्थिरता और ब्याज दर के साथ निरंतर और असतत समय को जोड़ता है। उचित शुल्क का निर्धारण प्रीमियम और लाभ के बीच संतुलन की स्थिति के आधार पर किया जाता है। हमने अस्थिरता और ब्याज दरों के निरंतर स्तर के साथ-साथ स्वास्थ्य स्थिति और अस्पताल में भर्ती होने से संबंधित लाभों को भी ध्यान में रखा है। इस उत्पाद की प्रभावशीलता को प्रदर्शित करने और संभावित संवर्द्धन का पता लगाने के लिए संख्यात्मक और संवेदनशीलता विश्लेषण किया गया है। निष्कर्ष

से यह पता चला कि निकासी की राशि और व्यक्ति की उम्र, दोनों का लागत पर महत्वपूर्ण प्रभाव पड़ता है। बीमा की न्यूनतम आयु में वृद्धि और शुरू में निकाली जा सकने वाली राशि बढ़ने से उत्पाद की कीमत अधिक हो जाती है। निकासी राशि में GLWB राइडर की गारंटीकृत राशि और चिकित्सा व्यय दोनों शामिल होते हैं।

पारंपरिक वार्षिकियां कभी-कभी अनुकूलन क्षमता की कमी रखती हैं और व्यक्तियों की विभिन्न आवश्यकताओं, विशेषकर स्वास्थ्य देखभाल खर्चों के संदर्भ में, पर्याप्त रूप से जिम्मेदार नहीं होती हैं। हमने पॉलिसीधारक की स्वास्थ्य स्थिति के प्रभाव की जांच की है, जब पॉलिसीधारक अपने स्वास्थ्य पर निर्भर प्रीमियम का भुगतान करना बंद कर देता है और एक परिवर्तनीय वार्षिकी अनुबंध से लाभ प्राप्त करना शुरू कर देता है, जिसमें GLWB (गारंटीयुक्त आजीवन निकासी लाभ) शामिल है। निकासी चरण शुरू करने के लिए आदर्श समय निर्धारित करने के लिए एक हाइब्रिड निरंतर-असतत समय मॉडल तैयार किया गया है। यह मॉडल गतिशील और स्थिर दोनों परिदृश्यों पर विचार करते हुए, बाजार की स्थितियों के आधार पर निवेश और विनिवेश ट्रिगर स्थापित करता है। स्थिर परिदृश्य में, इष्टतम समय की गणना उस समय की जाती है जब पॉलिसी पहली बार स्थापित की जाती है। दूसरी ओर, गतिशील परिदृश्य में, शुरू करने का सबसे अच्छा समय वास्तविक स्थगन विकल्प की व्यायाम सीमा की बार-बार गणना करके निर्धारित किया जाता है।

परिवर्तनीय वार्षिकियां आमतौर पर मूल्य निर्धारण, हेजिंग और शुल्क विश्लेषण के लिए एकल-परिसंपत्ति मॉडल का उपयोग करती हैं, इस तथ्य के बावजूद कि गारंटी में आमतौर पर कई संपत्तियां शामिल होती हैं। यह व्यावहारिक समाधान कुछ चुनौतियां प्रस्तुत करता है, जिनमें बुनियादी जोखिम की संभावना भी शामिल है।

हमने एक परिष्कृत मात्रात्मक मॉडल का उपयोग करके जीएलडब्ल्यूबी के साथ मुद्रास्फीति से जुड़ी परिवर्तनीय वार्षिकियां (ILVA) के उपयोग की जांच की। अधिक सटीक रूप से, हमने एक ऐसे ढांचे की जांच की है जिसमें कई आयाम और उप-खाते शामिल हैं, जहां फंड का मूल्य परस्पर जुड़ी संपत्तियों के संग्रह द्वारा निर्धारित किया जाता है। इसके अलावा, शोध में मार्कोवियन स्वास्थ्य लाभों को शामिल किया गया है, जो मॉडलिंग की जटिलता को बढ़ाता है। प्रीमियम और लाभों के बीच संतुलन पर विचार करके उत्पाद का न्यायसंगत शुल्क निर्धारित करने के लिए एक हाइब्रिड असतत-निरंतर समय मॉडल का सुझाव दिया गया है। एक निश्चित स्तर के जोखिम को बनाए रखते हुए, बीमा फर्म के उप-खाता निधि मूल्य को अधिकतम करने के लिए एक द्विघात उपयोगिता अनुकूलन समस्या तैयार की गई है। इस वित्तीय साधन की क्षमता को दिखाने और संभावित सुधारों की जांच करने के लिए एक अनुभवजन्य विश्लेषण और संवेदनशीलता मूल्यांकन आयोजित किया गया। एक व्यापक तुलनात्मक अध्ययन भी किया गया, जिसमें मौजूदा मॉडल की तुलना की गई, जिसमें केवल एक उच्च जोखिम वाली संपत्ति शामिल है और मुद्रास्फीति के लाभों पर विचार नहीं किया गया है।

इसके अलावा, हमने वित्तीय नियोजन के क्षेत्र में दो महत्वपूर्ण तत्वों की जांच की है: क्यू-लर्निंग ढांचे का उपयोग करके बीमाकर्ता की फीस में रणनीतिक कमी और अनुबंध में अंतर्निहित उचित शुल्क संरचना का मूल्यांकन। स्वास्थ्य और बाजार रिटर्न को ध्यान में रखते हुए, बीमाकर्ता के दृष्टिकोण से शुल्क को प्रभावी ढंग से कम करने के लिए परिमित-क्षितिज क्यू-लर्निंग तकनीक का उपयोग किया जाता है। किसी फंड के मूल्य को दर्शाने के लिए हेस्टन मॉडल का उपयोग किया जाता है। इसके अतिरिक्त, हमारे मॉडल ने

पॉलिसीधारक को वित्तीय सुरक्षा लाभ (FSB) की पेशकश की, जिसमें उत्तरजीवी और बच्चों दोनों के लिए लाभ शामिल हैं।

इस वित्तीय समाधान की क्षमताओं को प्रदर्शित करने और संभावित सुधारों की जांच करने के लिए एक संख्यात्मक शोध आयोजित किया जाता है। एक तुलनात्मक विश्लेषण एक स्थापित मॉडल का उपयोग करके किया गया, जिसमें निश्चित लागत थी और इसमें FSB शामिल नहीं था। अध्ययन में पाया गया कि स्वास्थ्य और अस्थिरता सूचकांक (VIX) के आधार पर शुल्क में कटौती की जाती है, जो एक वास्तविक समय सूचकांक है जो S&P 500 सूचकांक (SPX) के निकट अवधि के मूल्य परिवर्तनों की सापेक्ष ताकत के लिए बाजार की अपेक्षाओं को दर्शाता है। इससे लाभ और उत्पाद के व्यपगत होने की संभावना कम हो जाती है।

Contents

Certificate	i
Acknowledgments	iii
Abstract	v
List of Figures	xv
List of Symbols	xvii
List of Abbreviations	xix
1 Introduction	1
1.1 Types of Annuity	2
1.2 Preliminaries	3
1.2.1 Guarantees embedded in VAs contract	3
1.3 Literature Review	13
1.4 Thesis Outline	18
2 Dynamic Withdrawal for GLWB with Surrender Benefit and Stochastic Interest Rate	21
2.1 Introduction	21
2.2 Stylized Features In Return And Log-Return Series	24
2.3 Model Description and risk-neutral measure	32
2.3.1 Volatility Modeling	32
2.3.2 GARCH Model	33
2.3.3 Dynamic-Withdrawal Strategy and Surrender Option:	35

2.3.4	Risk-Neutral Pricing	36
2.3.5	Construction of Risk-Neutral Measure	36
2.4	Pricing Model	38
2.4.1	Without surrender	41
2.4.2	With surrender	42
2.5	Numerical Results and Sensitivity analysis	43
2.5.1	Data Description	43
3	Analysis of fair fee in Markovian health and GLWB	51
3.1	Introduction	51
3.2	Model Description	53
3.2.1	Computation of life benefit	56
3.2.2	Computation of death benefit	59
3.3	Numerical Results and Sensitivity Analysis	61
3.3.1	Data Description	62
3.3.2	Numerical Calculation	62
3.3.3	Sensitivity analysis	66
4	Optimal investment-disinvestment choices in health-dependent VA	69
4.1	Introduction	69
4.2	Problem Description and Main Assumptions	71
4.2.1	Investment and withdrawal regime	73
4.2.2	Expected wealth	76
4.3	Actuarial Valuation Formulas	77
4.3.1	Computation of the expected discounted total premiums payment	77
4.3.2	Computation of the expected discounted total withdrawals	79
4.3.3	Computation of the Expected Death benefits	82
4.3.4	Solving the optimal decision problems	88
4.4	Numerical Results and Sensitivity Analysis	89
4.4.1	Data Description	89
4.4.2	Numerical calculation	90
4.4.3	Sensitivity Analysis	94
5	Fair Fee Analysis of ILVAs with GLWB: Exploring Sub-Account Dynamics	97
5.1	Introduction	97

5.2	Model description	100
5.2.1	Inflation Index	101
5.2.2	Markovian health status	102
5.2.3	Withdrawal benefits	103
5.2.4	Optimal portfolio	104
5.3	Expected Benefits	106
5.3.1	Computation of life benefits	106
5.3.2	Computation of Death benefit	108
5.3.3	Monte Carlo technique for fund process	109
5.4	Numerical and Sensitivity Analysis	110
5.4.1	Data Description	111
5.4.2	Estimated parameters	111
5.4.3	Numerical calculations	112
5.4.4	Model comparison	118
6	Optimizing VA Fees: Q-Learning with Semi-Markovian Health and VIX-Linked Features	121
6.1	Introduction	121
6.2	Market model and benefits	124
6.2.1	Health evolution and benefits	124
6.2.2	FSB and withdrawal regime	127
6.3	Fee structure and fund Dynamics	128
6.3.1	Health and VIX-linked Fee structure	129
6.3.2	Fund dynamics	132
6.4	Actuarial Valuation Equations	132
6.4.1	Computation of life benefit	133
6.4.2	Computation of death benefit	136
6.4.3	Computation of family security benefit	137
6.4.4	Fair fee	138
6.5	Numerical Results	139
6.5.1	Data description	139
6.5.2	Numerical calculation and model comparison	140
6.5.3	Finite-Horizon Q-Learning	141
6.5.4	Model comparison	143

7 Contributions, Limitations, and Future Work	149
7.1 Conclusion	149
7.2 Future work	151
Bibliography	153
List of Publications	163
Curriculum Vitae	165

List of Figures

2.1	Returns plot	25
2.2	ACF plot of returns	27
2.3	PACF plot of returns	28
2.4	ACF plot of Absolute returns	29
2.5	ACF plot of returns square	30
2.6	Plot of EPV vs. surrender charges	49
2.7	Break even fee vs. g	50
3.1	The health status of the policyholder according to the ability to perform daily activities (ADLs) (see Moosavi and Payandeh[83])	54
3.2	Dynamic of fund	60
3.3	Break even fee for different age groups	67
3.4	EPV vs. shift parameter (ϵ)	68
4.1	Flow chart of the investment and disinvestment	74
4.2	Dynamics of fund	75
4.3	Plot of Fee vs. Expected wealth	95
4.4	Plot of optimal Expected wealth vs. fee for different ages	96
5.1	State transition diagram of Markovian health status	102
5.2	Fund evolution corresponding to the portfolio choice $\boldsymbol{\omega} = [\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}]^T$	105
5.3	Break even fee for different ages and ϵ values	117
5.4	Fair fee for different age groups	118
5.5	Optimal weights corresponding to the risk aversion(δ) = 0.009	119
5.6	EPV and fair fee ratio plot	120

6.1	Sample path of the health process	127
6.2	VIX and S&P500 data plot	131
6.3	Sub-account evolution	133
6.4	Optimal Reduction of fee	146
6.5	EPV and fair fee ratio plot before fee reduction	147
6.6	Reduction states based on the health and the VIX	147

List of Symbols

Symbol	Meaning
y	Initial insured age [i.e., Insured age at period 0]
r_t	Rate of interest at time t
H_{t-}	Value of fund after fee deduction at the beginning of t^{th} year
H_t	Value of fund before guarantee deduction at the end of t^{th} year
H_{t+}	Value of fund after guarantee deduction at the end of t^{th} year
h_0	Initial value of fund
S_t	Value of stock price at the end of t^{th} year
s_0	Initial Value of stock price
γ	Fee charged by the insurance company
G	Total withdrawal as % of h_0
$s_p(t)$	Surrender penalty for the year t
$l(t)$	Net amount received by the policyholder in the case of dynamic withdrawal
ω_t	Discretionary withdrawal amount at the year t
C	Periodic random withdrawal % of h_0
r	Constant rate of interest
t_τ	Withdrawal phase initiation time
$\psi(t_i, t_j)$	Time t_i price of the default-free discount bond maturing at t_j
Γ	Periodic constant withdrawal % of h_0
$g(t)$	Health expenditure at time t
W_t	Standard Brownian motion
X_t	Health status of the policyholder at time t

List of Abbreviations

Symbol	Meaning
VA	Variable Annuity
GLWB	Guaranteed Lifetime Withdrawal Benefit
FSB	Family Security Benefits
GMLB	Guaranteed Minimum Living Benefit
GMDB	Guaranteed Minimum Death Benefit
GMMB	Guaranteed Minimum Maturity Benefit
GMIB	Guaranteed Minimum Income Benefit
GMAB	Guaranteed Minimum Accumulation Benefit
GMWB	Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit
GMSB	Guaranteed Minimum Surrender Benefit
ELB	Expected Life Benefits
EDB	Expected Death Benefits
EFSB	Expected Family Security Benefits
EPV	Expected Present Value
GBM	Geometric Brownian Motion
SDE	Stochastic Differential Equation
ARCH	Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
ARMA	Autoregressive Moving Average
GARCH	Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
ACF	Autocorrelation Function
PACF	Partial Autocorrelation Function
IADL	Instrumental Activities of Daily Living
ADL	Activities of Daily Living

CTMC	Continuous-Time Markov Chain
DTMC	Discrete-Time Markov Chain
ILVAs	Inflation-Linked Variable Annuities