

**SHEATH CHARACTERISTICS IN A PLASMA
CARRYING ELECTRON EMISSION FROM THE
WALL**

YETENDRA PRASAD JHA



**DEPARTMENT OF PHYSICS
INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI**

July 2023

© Indian Institute of Technology Delhi (IITD), New Delhi, 2023

**SHEATH CHARACTERISTICS IN A PLASMA
CARRYING ELECTRON EMISSION FROM THE
WALL**

by

YETENDRA PRASAD JHA

Department of Physics

Submitted

in fulfillment of the requirements of the degree of Doctor of Philosophy

to the



INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI

July 2023

Dedicated to

my family

&

friends

who inspired and encouraged me

Certificate

This is to certify that the thesis entitled “**Sheath Characteristics in a Plasma Carrying Electron Emission From the Wall**” being submitted by **Mr. Yetendra Prasad Jha** is worthy of consideration for the award of the degree of Doctor of Philosophy and is a record of the original bonafide research work carried out by him under our guidance and supervision, and that the results contained in it have not been submitted in part or full to any other university or institute for award of any degree / diploma.

We certify that he has pursued the prescribed course of research. We approve the thesis for the award of the degree of Doctor of Philosophy.



Hitendra K. Malik

Professor

Department of Physics

Indian Institute of Technology Delhi

India



Mayank Kumar

Professor

Department of Mechanical Engineering

Indian Institute of Technology Delhi

India

Acknowledgements

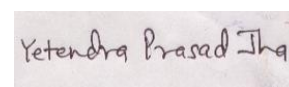
As the thesis has been completed, I am grateful to God for all of the possibilities, insights, and benefits that He has provided for me. My supervisors, Professors Hitendra K. Malik and Mayank Kumar, provided crucial advice and assistance that made this study feasible. My writing has benefited much from their in-depth knowledge and careful editing. They provided me with unwavering support, priceless advice, patience, and collaboration, which enabled me to be willing to publish my study in its current form. This study was improved above my expectations by their extensive experience, direction, and editing.

My appreciation goes out to Prof. Ramesh Narayanan, Prof. Vikrant Saxena, and Prof. Santanu Ghosh, who are all members of my SRC. With their supportive remarks and intelligent, in-depth assessments, they truly mean a lot to me. I'd want to express my gratitude for their attentive attention to my presentation and considerate critique of my work despite their busy schedules.

The following individuals deserve particular mention: Dr. Rajat Dhawan, Dr. Manish Dwivedi, Dr. Tamanna Punia, Munish Yadav, Sonu Kumar, Sandeep, Dhananjay Verma, Rakesh Kumar, Mohit Kumar, Subhajit Bhasker, Gaurav Kumar, Deepak Kumar, and Shailesh Kumar. They were all always prepared to help me with any problems I had.

My family has done so much for me, and I will always be appreciative of it. My father, Sh. Subhash Chandra Jha, taught me how to work as a team and lead, my mother, Smt. Padma Devi, taught me how to handle difficulties quietly, and my brother, Mr. Akanand Jha, showed me how to outwork talent. I am appreciative of my sister, Ms. Rakhi Dubey, who has consistently shown kindness and belief in me.

In closing, I would like to express my gratitude to the Indian Government, the Council of Scientific and Industrial Research-University Grant Commission (CSIR-UGC), and Indian Institute of Technology Delhi for their financial support to my study.



Yetendra Prasad Jha

Abstract

The formation of a sheath at the place where plasma meets a boundary confines the more energetic species while enabling the less energetic to escape through the boundary. Positive ions, negative ions, and other ion species all have an impact on this sheath. Positive space-charge in the sheath causes a normal electropositive plasma to have a negative potential curvature, which raises the plasma potential over the boundary potential. The plasma border is frequently thought to be perfectly absorbing, meaning that any ions or electrons that make it to the wall are lost by recombination. But lately, greater focus has been placed on surfaces that release electrons and the consequences those electrons have on the sheath. The term "emissive sheath" in this work refers to the sheath surrounding an electron emitting surface, whereas the term "collecting sheath" refers to the sheath surrounding a strictly collecting surface. There are numerous ways that electrons can leave a surface, including photoelectric emission from ultraviolet light, thermionic emission from heating, and secondary emission from particle impacts. Space-charge effects are the results of these extra electrons on the sheath structure. Modern technologies, ranging from plasma treatment to heavy ion beams for fusion, depend heavily on electron emission. Emitted electrons diminish the sheath potential, in turn reducing confinement of particles and energy. A thorough knowledge of how released electrons contribute to the sheath development is required to properly analyze the sheath properties. The sheath details are vitally crucial to elements of plasma physics, from probe theory to plasma confinement.

For technologies pushing the limits of complexity to operate effectively, a precise theoretical model based on the relevant physics is essential. When a device is used in harsh environments, the interplay between several electron emission processes can significantly influence how well it performs also, the surface properties of the materials used in the microelectronics, semiconductor, and automotive industries continuously deteriorate, and their applications are limited by problems with poor corrosion resistance, wear resistance, surface roughness, fatigue failure, and lower hardness. A material's surface characteristics determine how well it performs. Therefore, it is essential to reduce hostile surroundings in order to maintain the material surfaces and study engineering industries in greater depth. The processing of plasma-based materials using knowledge of plasma-surface interactions is one of the most important techniques to address such issues. In order to change a specific surface biological feature while keeping bulk qualities unaffected, plasma-based surface therapies are essential.

Understanding the idea of sheath, which is a thin layer of charged species that is produced surrounding a metallic conducting surface when it comes into contact with a plasma, is essential to comprehending the process of plasma-surface interactions.

Negative ions, positive ions, and electrons make up electronegative plasma. Since the previous two decades, these plasmas have been increasingly popular due to their expanding uses in a variety of sectors, including the microelectronics sector, thin-film deposition and sputtering, mass spectroscopy, plasma-based surface preparation, and many more. These plasmas are suitable for these purposes because of the electrons' comparatively little influence on the surface of the substance under study. They are employed as ion sources in many applications because both positive and negative ion beams are necessary; they have also been used in low energy beam applications and in situations where intense electrons can have damaging effects on the surface. The best way to prevent irregular forms is to inject negative ions to the wafer in order to balance out the positive ions and improve the performance of the materials used to make integrated circuits. Due to their significantly lower sheath voltage than electropositive plasmas, electronegative plasmas are frequently used on soft substrates to provide a defect-free examination.

There are just a few mathematical models that look at how non-extensive dispersed electrons affect the sheath properties accessible in the literature. In order to investigate the actual world situation more thoroughly, it is desirable to create new models. The behavior of plasma properties and the sheath formation criterion have been studied using several theoretical models. These models still have significant drawbacks, though. For instance, most studies believed that negative ions behaved according to their Boltzmann distribution, which is far from the truth since it ignores the mass of the ions. Both these ions should be treated equally with the inclusion of their masses since there isn't much of a difference between the mobilities of the positive and negative ions and it isn't reasonable to evaluate the Boltzmann distribution for solely negative ions. Additionally, the mass-ratio of the ions, which is critical to the sheath creation process during plasma-based material processing, is also ignored. Most of the analytical and simulation models, the researchers have neglected the collisions, temperature of positive ions, and non-extensivity in the plasmas, or have not been considered all together by them. It is observed that the ions have finite temperature and may have collisions with the neutrals in the plasmas used for processing.

Considering the aforementioned features, we have presented theoretical models in the current thesis where the distribution of primary (plasma) electrons is taken to be non-extensive as per Tsallis statistics and the electric field at the cathode, the ratio of ion to electron current density and the velocity of ions are evaluated and the results are compared with the case of electrons having Boltzmann distribution. The variation of the electric potential, space charge density and sheath thickness are analysed for the cases of different non-extensivity q .

Also, the current study offers a model that takes into account all the crucial factors, such as the temperature of positive ions, their collisions with neutrals, the emission of electrons from the wall, electronegativity, ionization and non-extensivity. The effect of negative ions on sheath formation with floating wall condition is explored where ions are thought to have a finite mass, and the fluid equations are assumed to control the behaviour of both positive and negative ions. By taking into account the generalised circumstance of the negative ions' differing masses from the positive ions, we have also taken into consideration the drift factor in the momentum transfer equation of the negative ions. It has been determined that the drift term for negative ions significantly affects the sheath formation criterion by comparing the scenarios of its existence and absence in light of practical circumstances. The effect of the mass ratio of negative to positive ions on the behaviour of plasma parameters and sheath properties has also been studied. We developed model for the formation of sheath under the effect of oblique magnetic field. The key finding is that the electric field at cathode becomes zero at lower value of electron beam current density and hence the formation of the virtual cathode takes place earlier for the case of super-extensive distributed electrons as compared to that of the Boltzmann-distributed electrons. For super extensively distributed electrons the electric potential drops slowly to a minimum, velocity of positive ions increases inside the sheath and increase in the sheath thickness is observed. For the case of low electronegativity, decreasing the non-extensive parameter (q) increases the sheath thickness more significantly as compared to that of the high electronegativity. The sheath formed during the interaction is evaluated and its thickness is compared for three different plasmas (C_{60} plasma, Oxygen plasma and CF_4 plasma) and the sheath thickness is found to be maximum in C_{60} plasma and minimum in Oxygen plasma. Although Bohm velocity does not depend on the strength of the magnetic field, but the slope in the electrostatic potential gets increased and the sheath thickness decreased on raising the strength of the magnetic field.

This thesis' findings might be useful in studies like plasma-based material processing, where a larger potential gradient is preferable to have superior thin film deposition since the

positive ions are concentrated in a small area and lead to the production of a preferred thin film. These findings might aid experimentalists in choosing a particular plasma for a given task. By replacing the beam electrons emitted from the cathode with negative ions in our model, the transport of the negative ions across the double sheath can be understood, with the application in negative ion source, which is a suitable candidate for neutral beam injector (NBI) for a fusion reactor such as ITER. We can calculate the floating potential of an emitting electrode, secondary electron emission as in capacitively coupled plasma processing applications and nitriding where the positive ions get accelerated towards the wall due to the electrical biasing and have energy in keV range sufficient to eject the electrons from the wall on hitting. The thermionic emission of electrons e.g., in emissive probe, thermionic converters, can be explained.

सार

जिस जगह प्लाज्मा एक सीमा क्षेत्र या दीवार के संपर्क में आता है वहां एक परत का निर्माण होता है जो अधिक ऊर्जावान आवेशित कणों के बहाव को सीमित कर देता है जबकि कम ऊर्जावान कणों को बाउंड्री से बाहर निकलने में सक्षम बनाता है। धनात्मक आयन, ऋणात्मक आयन और अन्य आयन कण सभी इस परत पर प्रभाव डालते हैं। परत में धनात्मक आवेश क्षेत्र एक सामान्य इलेक्ट्रोपोसिटिव प्लाज्मा में ऋणात्मक वैभव वक्रता का कारण बनता है, जो बाउंड्री के वैभव से अधिक प्लाज्मा वैभव को बढ़ाता है। यह अक्सर माना जाता है कि प्लाज्मा सीमा क्षेत्र पूरी तरह से आवेशोष्ण प्रवृत्ति की होती है, जिसका अर्थ है कि जो भी आयन या इलेक्ट्रॉन क्षेत्र में पहुँचते हैं वे पुनर्संयोजन द्वारा खत्म हो जाते हैं। लेकिन हाल ही में, उन सतहों पर अधिक ध्यान केंद्रित किया गया है जो इलेक्ट्रॉनों को उत्सर्जित करती हैं या जिन पर उन इलेक्ट्रॉनों का प्रभाव पड़ता है। इस कार्य में शब्द "उत्सर्जक परत" का तात्पर्य एक इलेक्ट्रॉन उत्सर्जित सतह के आसपास की परत से है, जबकि "संग्रहीत परत" शब्द का तात्पर्य विशेष रूप से संग्रहीत सतह के आसपास की परत से है। ऐसे कई तरीके हैं जिनसे इलेक्ट्रॉन किसी सतह को छोड़ सकते हैं, जिसमें पराबैंगनी प्रकाश से फोटोइलेक्ट्रिक उत्सर्जन, हीटिंग से थर्मिओनिक उत्सर्जन और कण प्रभावों से माध्यमिक उत्सर्जन शामिल है। स्पेस-चार्ज प्रभाव परत की संरचना पर इन अतिरिक्त इलेक्ट्रॉनों के परिणाम हैं। प्लाज्मा नियोजित उपयोग से लेकर संलयन के लिए भारी आयन बीम तक की आधुनिक प्रौद्योगिकियां, इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन पर बहुत अधिक निर्भर करती हैं। उत्सर्जित इलेक्ट्रॉन परत के वैभव को कम कर देते हैं, जिससे कणों और ऊर्जा का प्रतिबंधन कम हो जाता है। परत के गुणों का उचित विश्लेषण करने के लिए यह जानना आवश्यक है कि इलेक्ट्रॉन परत के विकास में कैसे योगदान करते हैं। प्रोब सिद्धांत से लेकर प्लाज्मा प्रतिबंधन तक, परत के बारे में जानना प्लाज्मा भौतिकी के मूल सिद्धांत के लिए अत्यंत महत्वपूर्ण है।

जटिलता की सीमाओं को आगे बढ़ाने वाली प्रौद्योगिकियों को प्रभावी ढंग से संचालित करने के लिए प्रासंगिक भौतिकी पर आधारित एक सटीक सैद्धांतिक मॉडल आवश्यक है। जब किसी उपकरण का उपयोग प्रतिकूल परिस्थितियों में किया जाता है, तो कई इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन प्रक्रियाओं के बीच परस्पर क्रिया महत्वपूर्ण रूप से प्रभावित कर सकती है कि यह कितना अच्छा प्रदर्शन करता है, माइक्रोइलेक्ट्रॉनिक, सेमीकंडक्टर और ऑटोमोटिव उद्योगों में उपयोग की जाने वाली सामग्रियों की परत के गुण लगातार खराब होते हैं, और खराब संक्षारण प्रतिरोध, वियर प्रतिरोध, सतह खुरदरापन, सुस्त विफलता और निम्न कठोरता की समस्याओं के कारण उनके अनुप्रयोग सीमित होते हैं। किसी धातु की सतह की विशेषताएं यह निर्धारित करती हैं कि वह कितना अच्छा करी करती है। इसलिए, भौतिक सतहों

को बनाए रखने और इंजीनियरिंग उद्योगों का अधिक गहराई से अध्ययन करने के लिए प्रतिकूल परिवेश को कम करना आवश्यक है। प्लाज्मा-सतह संपर्क के ज्ञान का उपयोग करके प्लाज्मा-आधारित सामग्रियों का प्रसंस्करण ऐसे मुद्दों को संबोधित करने के लिए सबसे महत्वपूर्ण तकनीकों में से एक है। थोक गुणों को अप्रभावित रखते हुए एक विशिष्ट सतह जैविक विशेषता को बदलने के लिए प्लाज्मा-आधारित नियोजित उपयोग आवश्यक हैं। आवेशित के कणों की एक पतली परत को समझना, जो प्लाज्मा के संपर्क में आने पर धातु की सुचालक सतह के चारों ओर उत्पन्न होती है, प्लाज्मा-सतह संपर्क की प्रक्रिया को समझने के पश्चात ही ठीक से संभव है।

ऋणात्मक आयन, धनात्मक आयन और इलेक्ट्रॉन मिलकर विद्युत ऋणात्मक प्लाज्मा बनाते हैं। पिछले दो दशकों से इस तरह के प्लाज्मा माइक्रोइलेक्ट्रॉनिक्स क्षेत्र, पतली-फिल्म जमाव और स्पटरिंग, मास स्पेक्ट्रोस्कोपी, प्लाज्मा-आधारित सतह बनाना और कई अन्य क्षेत्रों सहित विभिन्न क्षेत्रों में अपने बढ़ते उपयोग के कारण तेजी से प्रचलित हो रहे हैं। ये प्लाज्मा इन उद्देश्यों के लिए उपयुक्त हैं क्योंकि अध्ययन के तहत पदार्थ की सतह पर इलेक्ट्रॉनों का प्रभाव अपेक्षाकृत कम होता है। इन्हें कई अनुप्रयोगों में आयन स्रोतों के रूप में नियोजित किया जाता है क्योंकि धनात्मक और ऋणात्मक दोनों आयन किरणें आवश्यक हैं। इनका उपयोग कम ऊर्जा किरण अनुप्रयोगों और उन स्थितियों में भी किया गया है जहां तीव्र इलेक्ट्रॉन सतह पर हानिकारक प्रभाव डाल सकते हैं। अनियमित रूपों को रोकने का सबसे अच्छा तरीका धनात्मक आयनों को संतुलित करने और एकीकृत सर्किट बनाने के लिए उपयोग की जाने वाली सामग्रियों के प्रदर्शन में सुधार करने के लिए वेफर में ऋणात्मक आयनों को इंजेक्ट करना है। इलेक्ट्रोपोसिटिव प्लाज्मा की तुलना में इलेक्ट्रोनगेटिव प्लाज्मा के काफी कम परत वैभव के कारण इनके उपयोग दोष-मुक्त मूल्यांकन करने के लिए अक्सर नरम सबस्ट्रेट्स पर किया जाता है।

केवल कुछ गणितीय मॉडल हैं जो बताते हैं कि गैर-व्यापक रूप से वितरित हुए इलेक्ट्रॉन परत के गुणों को कैसे प्रभावित करते हैं। वास्तविक स्थिति की अधिक गहनता से जांच करने के लिए नए मॉडल बनाना वांछनीय है। कई सैद्धांतिक मॉडलों का उपयोग करके प्लाज्मा गुणों के स्वाभाव और परत निर्माण मानदंड का अध्ययन की जा चुकी है। हालाँकि, इन मॉडलों में अभी भी महत्वपूर्ण कमियाँ हैं। उदाहरण के लिए, अधिकांश अध्ययनों से यह माना गया है कि ऋणात्मक आयन अपने बोल्ट्ज़मैन वितरण के अनुसार व्यवहार करते हैं, जो सच्चाई से बहुत दूर है क्योंकि यह आयनों के द्रव्यमान को अनदेखा करता है। इन दोनों आयनों को उनके द्रव्यमान के समावेश के साथ समान रूप से व्यवहार किया जाना चाहिए क्योंकि धनात्मक और ऋणात्मक आयनों की गतिशीलता के बीच बहुत अंतर नहीं है और केवल ऋणात्मक आयनों के लिए बोल्ट्ज़मैन वितरण का मूल्यांकन करना उचित नहीं है। इसके अतिरिक्त, आयनों का

द्रव्यमान-अनुपात, जो प्लाज्मा-आधारित सामग्री प्रसंस्करण के दौरान परत निर्माण प्रक्रिया के लिए महत्वपूर्ण है, को भी नजरअंदाज कर दिया गया है। अधिकांश विश्लेषणात्मक और सिमुलेशन मॉडल में शोधकर्ताओं ने टकराव, धनात्मक आयनों के तापमान और प्लाज्मा में गैर-व्यापकता की उपेक्षा की है, या उनके द्वारा सभी पर एक साथ विचार नहीं किया गया है। यह देखा गया है कि आयनों का तापमान सीमित होता है और प्रसंस्करण के लिए उपयोग किए जाने वाले प्लाज्मा में उदासीन कणों के साथ उनकी टक्कर हो सकती है।

उपर्युक्त विशेषताओं को ध्यान में रखते हुए, हमने वर्तमान शोधग्रंथ में सैद्धांतिक मॉडल प्रस्तुत किए हैं जहां प्राथमिक (प्लाज्मा) इलेक्ट्रॉनों का वितरण त्सेलिस आंकड़ों और कैथोड पर विद्युत क्षेत्र के अनुसार गैर-व्यापक माना गया है, आयन का इलेक्ट्रॉन वर्तमान घनत्व का अनुपात और आयनों के वेग का मूल्यांकन किया गया है और परिणामों की तुलना बोल्ट्ज़मान वितरण वाले इलेक्ट्रॉनों के मामले से की गयी है। विभिन्न गैर-व्यापकता q के मामलों के लिए विद्युत वैभव, चार्ज घनत्व और परत की मोटाई की भिन्नता का विश्लेषण किया गया है।

साथ ही, वर्तमान अध्ययन एक मॉडल पेश करता है जो सभी महत्वपूर्ण कारकों, जैसे धनात्मक आयनों का तापमान, उदासीन कणों के साथ उनकी टक्कर, दीवार से इलेक्ट्रॉनों का उत्सर्जन, इलेक्ट्रॉनगेटिविटी, आयनीकरण और गैर-विस्तारकता, को ध्यान में रखता है। फ्लोटिंग वाल की दशा के साथ परत निर्माण पर ऋणात्मक आयनों के प्रभाव का पता लगाया गया है, जहां आयनों को एक सीमित द्रव्यमान वाला माना जाता है, और द्रव समीकरणों को धनात्मक और ऋणात्मक दोनों आयनों के व्यवहार को नियंत्रित करने के लिए लिया गया है। धनात्मक आयनों से ऋणात्मक आयनों के भिन्न द्रव्यमान की सामान्यीकृत परिस्थिति को ध्यान में रखते हुए हमने ऋणात्मक आयनों के संवेग हस्तांतरण समीकरण में बहाव कारक को भी लिया है। यह निर्धारित किया गया है कि ऋणात्मक आयनों के लिए बहाव शब्द व्यावहारिक परिस्थितियों की दृष्टि में इसकी उपस्थिति और अनुपस्थिति के परिदृश्यों की तुलना करके परत निर्माण मानदंड को महत्वपूर्ण रूप से प्रभावित करता है। प्लाज्मा मापदंडों और परत के गुणों के स्वाभाव पर ऋणात्मक और धनात्मक आयनों के द्रव्यमान अनुपात के प्रभाव का भी अध्ययन किया गया है। हमने तिरछे चुंबकीय क्षेत्र के प्रभाव में परत के निर्माण के लिए भी मॉडल विकसित किया गया है। मुख्य खोज यह रही है कि कैथोड पर विद्युत क्षेत्र इलेक्ट्रॉन बीम वर्तमान घनत्व के कम मान पर शून्य हो जाता है और इसलिए आभासी कैथोड का निर्माण बोल्ट्ज़मान-वितरित इलेक्ट्रॉनों की तुलना में सुपर-व्यापक वितरित इलेक्ट्रॉनों के मामले में पहले होता है। अत्यधिक व्यापक रूप से वितरित इलेक्ट्रॉनों के लिए विद्युत वैभव धीरे-धीरे न्यूनतम हो जाता है, परत के अंदर धनात्मक आयनों का वेग बढ़ जाता है

और परत की मोटाई में वृद्धि देखी जाती है। कम इलेक्ट्रॉनगेटिविटी के मामले में, गैर-व्यापक पैरामीटर (क्यू) कम करने से उच्च इलेक्ट्रॉनगेटिविटी की तुलना में परत की मोटाई अधिक रूप से बढ़ जाती है। अंतःक्रिया के दौरान बनने वाली परत का मूल्यांकन किया गया है और इसकी मोटाई की तुलना तीन अलग-अलग प्लाज़्मा (C_{60} प्लाज़्मा, ऑक्सीजन प्लाज़्मा और CF_4 प्लाज़्मा) के लिए की गयी है। परत की मोटाई C_{60} प्लाज़्मा में अधिकतम और ऑक्सीजन प्लाज़्मा में न्यूनतम पाई गयी है। यद्यपि बोहम वेग चुंबकीय क्षेत्र की छमता पर निर्भर नहीं करता है, लेकिन चुंबकीय क्षेत्र की छमता बढ़ाने पर इलेक्ट्रोस्टैटिक क्षमता में ढलान बढ़ जाता है और परत की मोटाई कम हो जाती है।

इस शोधग्रंथ के निष्कर्ष प्लाज़्मा-आधारित सामग्री प्रसंस्करण जैसे अध्ययनों में उपयोगी हो सकते हैं, जहां बेहतर पतली फिल्म जमाव के लिए एक बड़ी वैभव ढाल बेहतर होता है क्योंकि धनात्मक आयन एक छोटे से क्षेत्र में केंद्रित होते हैं और एक निर्धारित पतली फिल्म के उत्पादन में सहयोग देते हैं। ये निष्कर्ष प्रयोगवादियों को किसी दिए गए उद्देश्य के लिए एक विशेष प्लाज़्मा चुनने में सहायता कर सकते हैं। हमारे मॉडल में कैथोड से उत्सर्जित बीम इलेक्ट्रॉनों को ऋणात्मक आयनों के साथ प्रतिस्थापित करके, ऋणात्मक आयन स्रोत में अनुप्रयोग के साथ, डबल परत में ऋणात्मक आयनों के वाहन को समझा जा सकता है, जो आईटीईआर जैसे संलयन रिएक्टर के लिए तटस्थ बीम इंजेक्टर (एनबीआई) के लिए उपयुक्त उम्मीदवार है। हम उत्सर्जक इलेक्ट्रोड की फ्लोटिंग क्षमता, कैपेसिटिव रूप से युग्मित प्लाज़्मा प्रसंस्करण अनुप्रयोगों और नाइट्राइडिंग में द्वितीयक इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन की गणना कर सकते हैं, जहां धनात्मक आयन विद्युत बायस के कारण दीवार की ओर किलोवोल्ट की पारस में ऊर्जा से त्वरित हो जाते हैं जो दीवार से टकराने पर इलेक्ट्रॉनों को बाहर निकालने के लिए पर्याप्त होती है। यही नहीं, उत्सर्जक प्रोब एवं थर्मिओनिक कन्वर्टर्स में इलेक्ट्रॉनों के थर्मिओनिक उत्सर्जन को भी समझाया जा सकता है।

Table of Contents

| | |
|---|----------------|
| Certificate..... | i |
| Acknowledgements..... | ii |
| Abstract..... | iii |
| Table of Contents..... | xiii |
| List of Figures..... | xviii |
| List of Symbols..... | xxiii |
| Chapter 1: Introduction and Literature Review..... | 1 - 23 |
| 1.1. Plasma Sheath..... | 1 |
| 1.2. Presheath..... | 5 |
| 1.3. Electron Emission..... | 8 |
| 1.4. Floating Wall Condition..... | 10 |
| 1.5. Why Plasma Interaction with Electron Emitting Surfaces is Important?..... | 11 |
| 1.6. Literature Review..... | 12 |
| 1.7. Motivation..... | 17 |
| 1.8. Thesis Organization..... | 18 |
| Chapter 2: Role of Non-extensivity on Double Sheath and Virtual Cathode Formation in Collision-less Plasma | 25 - 39 |
| 2.1. Mathematical Model..... | 25 |
| 2.2. Normalization Parameters..... | 28 |
| 2.3. Normalized Equations..... | 28 |
| 2.4. Boundary Conditions..... | 29 |
| 2.5. Results..... | 30 |
| 2.5.1. Effect of non-extensivity on the electric field at the cathode | 30 |

| | |
|---|----------------|
| 2.5.2. Effect of non-extensivity on the maximum values of beam current density..... | 31 |
| 2.5.3. Effect of non-extensivity on the ratio of ion to electron current density..... | 32 |
| 2.5.4. Effect of non-extensivity on the normalised electric field and the electric potential | 33 |
| 2.5.5. Effect of non-extensivity on the normalised on different charged species and net space charge density | 34 |
| 2.5.6. Effect of non-extensivity on the normalised ion velocity and the sheath thickness..... | 35 |
| 2.6. Applications..... | 38 |
| Chapter 3: Impact of Collisions on Sheath Formation in an Electronegative Warm Plasma..... | 41 - 56 |
| 3.1. Mathematical Approach..... | 41 |
| 3.2. Normalization Parameters..... | 43 |
| 3.3. Normalized Equations..... | 43 |
| 3.4. Boundary Conditions..... | 43 |
| 3.4.1. Modified Bohm's sheath criterion..... | 44 |
| 3.5. Result..... | 45 |
| 3.5.1. Impacts of collisional parameter and electron-to-positive-ion temperature ratio on Bohm criterion | 46 |
| 3.5.2. Impacts of electronegativity and electron-to-negative-ion temperature ratio on Bohm criterion..... | 46 |
| 3.5.3. Impacts of electronegativity and electron-to-negative-ion temperature ratio on Bohm criterion..... | 47 |
| 3.5.4. Impacts of collisions, electron-to-positive-ion temperature ratio, electron-to- negative-ion temperature ratio, and normalised electron beam current density, on Bohm criterion..... | 48 |

| | |
|--|----------------|
| 3.5.5. Impacts of collisions and electron-to-positive-ion temperature ratio on positive-ion-to-electron current density ratio..... | 49 |
| 3.5.6. Impacts of collisions and electron-to-positive-ion temperature ratio on electrostatic potential | 49 |
| 3.5.7. Impacts of collisions and electron-to-positive-ion temperature ratio on space charge density | 52 |
| 3.5.8. Impacts of collisions, normalised electron beam current density, and electron-to-negative-ion temperature ratio on electrostatic potential and space charge density.... | 53 |
| 3.5.9. Role of non-extensivity in the sheath formation with different extents of electronegativity. | 54 |
| 3.6. Applications..... | 56 |
| Chapter 4: Effect of Negative Ions on Sheath Formation: Floating Wall Condition | 57 - 66 |
| 4.1. Theoretical Formalism..... | 57 |
| 4.2. Normalization Parameters..... | 58 |
| 4.3. Normalized Equations | 59 |
| 4.4. Boundary Conditions | 60 |
| 4.5. Results | 60 |
| 4.5.1. Impacts of secondary electron emission coefficient on normalised electric potential..... | 60 |
| 4.5.2. Impacts of secondary electron emission coefficient on normalised electric potential | 61 |
| 4.5.3. Impacts of electronegativity on normalised secondary electron density..... | 62 |
| 4.5.4. Impacts of charge number on electrostatic potential inside the sheath and normalised secondary electron density at sheath edge | 64 |
| 4.5.5. Impacts of different mass ratios (positive ions mass to negative ions mass) on electrostatic potential inside the sheath | 65 |

| | |
|---|----------------|
| 4.6. Applications..... | 66 |
| Chapter 5: Role of Ionization on Sheath Formation in an Electronegative Warm Plasma..... | 67 - 76 |
| 5.1. Mathematical Model..... | 67 |
| 5.2. Normalization Parameters..... | 69 |
| 5.3. Normalized Equations..... | 69 |
| 5.4. Boundary Conditions | 70 |
| 5.5. Results..... | 70 |
| 5.5.1. Impacts of collisions and electron beam current density on normalised electric potential, space charge density, and positive and net negative charged species..... | 70 |
| 5.5.2. Impacts of non-extensivity and the ionization rate on normalised electric potential, net space charge density, and emitted beam electron density..... | 73 |
| 5.5.3. Impacts of mass ratio of negative ion to positive ion on the electrostatic potential and the density of emitted beam electrons..... | 74 |
| 5.6. Applications..... | 76 |
| Chapter 6: Sheath Formation Under the Effect of Oblique Magnetic Field..... | 77 - 88 |
| 6.1. Formulation of the Problem..... | 77 |
| 6.2. Normalization Parameters..... | 79 |
| 6.3. Normalized Equations..... | 79 |
| 6.4. Boundary Conditions | 80 |
| 6.5. Limiting Cases..... | 81 |
| 6.6. Results | 82 |
| 6.6.1. Impacts magnetic field inclination angle θ (in degrees) and electric field ϕ'_0 at the sheath edge on Bohm velocity..... | 82 |
| 6.6.2. Impacts of ionization parameter r and non-extensivity q on Bohm velocity..... | 83 |
| 6.6.3. Impacts of positive ion to electron temperature ratio γ_P and collisional parameter on Bohm velocity..... | 84 |

| | |
|---|------------------|
| 6.6.4. Impacts of electronegativity and negative ion to electron temperature ratio on Bohm velocity..... | 84 |
| 6.6.5. Impacts of normalized ionization parameter for different density of the secondary electrons at the edge of sheath and magnetic field inclination angle (in degrees) on Bohm velocity..... | 85 |
| 6.6.6. Impacts of normalized ionization parameter r for different density of non-extensivity and magnetic field inclination angle θ (in degrees) on Bohm velocity in absence of collision, and ionization..... | 87 |
| 6.6.7. Impacts of magnetic field strength on electrostatic potential..... | 87 |
| 6.7. Applications..... | 88 |
| Chapter 7: Conclusions, Applications, and Future Prospects..... | 89 - 93 |
| 7.1. Conclusions of Thesis Work..... | 89 |
| 7.2. Applications of the Results..... | 91 |
| 7.3. Future Scope..... | 93 |
| References..... | 95 - 102 |
| Brief Bio-data of Author..... | 103 - 105 |

List of Figures

Figure 1.1: Potential profile and different charged species inside the sheath.

Figure 1.2: Electric potential behavior in front of wall (negatively biased) for (a) small (finite $\epsilon = \lambda_D/L$) (b) $\epsilon \rightarrow 0$ (presheath scale $z = \frac{x}{L}$) (c) $\epsilon \rightarrow 0$ (sheath scale $\xi = \frac{x}{\lambda_D}$).

Figure 1.3: Sheath comprising of positive ions, plasma, and emitted beam electrons.

Figure 2.1: Schematic for one-dimensional electrostatic double sheath formation adjacent to cathode.

Figure 2.2: Variation of electric field at the cathode with beam current density for different values of q , and when $\Phi_C = 10$. ($q=1$ refers to the Boltzmann distribution).

Figure 2.3: Variation of normalized maximum values of beam current density with non-extensive parameter q , when $\Phi_C = 10$.

Figure 2.4: Ratio of ion to electron current density as a function of beam current density for $q = 0.999, 0.7$ and 0.5 when $\Phi_C = 10$.

Figure 2.5: (a) Normalised electric field (b) electrostatic potential in the double sheath as a function of normalised distance for different values of q i.e., $q = 0.999, 0.7$ and 0.5 for $\Phi_C = 10$.

Figure 2.6: Spatial variation of the densities of plasma electrons, beam electrons and ions for different values of q for $\Phi_C = 10$ and $J_b = 0.007$.

Figure 2.7: Variation of net space charge density with the normalised distance for different values of q and $\Phi_C = 10$.

Figure 2.8: Variation of normalized ion velocity with the normalised distance for different values of non-extensive parameter for $\Phi_C = 10$.

Figure 2.9: Variation of sheath thickness with the non-extensive parameter q for $\Phi_C = 10$.

Figure 3.1: Variation of the normalized initial velocity of the positive ions with the collisional parameter (α) and electron-to-positive-ion temperature ratio (γ_+), when $\phi'_0 = 0.1, N_{n0} = 5, \gamma_- = 10, \alpha = 0.1, \phi_C = 30, J_b = 0.003$ and $q = 0.5$.

Figure 3.2: Normalized velocity of positive ions at sheath edge as a function of the electronegativity (N_{n0}) and electron-to-negative-ion temperature ratio (γ_-), when $\phi'_0 = 0.1$, $\gamma_+ = 10$, $\alpha = 0.1$, $\phi_C = 30$, $J_b = 0.003$ and $q = 0.5$.

Figure 3.3: Variation of the normalized velocity of positive ions at the sheath edge with the normalized electron beam current density and non-extensivity (q), when $\phi'_0 = 0.1$, $N_{n0} = 1$ and 5 , $\gamma_+ = 10$, $\gamma_- = 10$, $\alpha = 0.1$ and $\phi_C = 30$.

Figure 3.4: Variation of the normalized velocity of positive ions at the sheath edge with the collisional parameter (α) and electron-to-positive-ion temperature ratio (γ_+), electron-to-negative-ion temperature ratio (γ_-) and normalised electron beam current density (J_b), when $\phi'_0 = 0.1$, $N_{n0} = 5$, $\phi_C = 30$, and $q = 0.5$.

Figure 3.5: Positive-ion-to-electron current density ratio as a function of beam current density for various values of the collisional parameter (α) and electron-to-positive-ion temperature ratio (γ_+) for $\phi'_0 = 0.1$, $N_{n0} = 5$, $\gamma_- = 10$, $\phi_C = 30$ and $q = 0.5$.

Figure 3.6: (a) Variation of normalised electric potential with the normalised distance for various values of the collisional parameter (α) and electron-to-positive-ion temperature ratio (γ_+), when $\phi'_0 = 0.1$, $N_{n0} = 5$, $\gamma_- = 10$, $J_b = 0.0025$, $\phi_C = 30$ and $q = 0.5$.

Figure 3.6: (b) Variation of normalised positive ion velocity (u_p) with normalised distance for different values of collisional parameter (α) and electron-to-positive-ion temperature ratio (γ_+), when $\phi'_0 = 0.1$, $N_{n0} = 5$, $\gamma_- = 10$, $J_b = 0.0025$, $\phi_C = 30$ and $q = 0.5$.

Figure 3.7: Variation of normalised density of charge species with the normalised distance for various values of the collisional parameter (α) where $\phi'_0 = 0.1$, $N_{n0} = 5$, $\gamma_- = 25$, $\gamma_+ = 10$, $J_b = 0.0025$, $\phi_C = 30$ and $q = 0.5$.

Figure 3.8: Variation of space charge density, (ρ_n) with the distance for various values of the collisional parameter (α) and temperature ratio (electron-to-positive-ion (γ_+)) when $\phi'_0 = 0.1$, $\gamma_- = 10$, $J_b = 0.001$, $\phi_C = 30$ and $q = 0.5$.

Figure 3.9: Variation of electric potential with the distance from the sheath edge to the cathode for various values of temperature ratio (electron to negative ion (γ_-)), electronegativity (N_{n0}), and electron beam current density when $\phi'_0 = 0.1$, $\gamma_+ = 10$, $\phi_C = 30$, $\alpha = 0.2$ and $q = 0.5$.

Figure 3.10: Variation of space charge density, (ρ_n) with the normalised distance for various values of electronegativity (N_{n0}), temperature ratio (electron to negative ion (γ_-)) and electron beam current density when $\phi'_0 = 0.1$, $\gamma_- = 10$, $\phi_C = 30$ and $q = 0.5$.

Figure 3.11: Variation of electric potential with the distance from the sheath edge to the cathode for various values of electronegativity N_{n0} and non-extensive parameter q , when $\phi'_0 = 0.1$, $\gamma_+ = 25$, $\gamma_- = 10$, $J_b = 0.002$, $\phi_C = 30$, and $\alpha = 0.2$.

Figure 4.1: Normalised electric potential as a function of normalised distance for the parameter of secondary electron emission coefficient (γ) with $\gamma_P = 0.10$, $\gamma_N = 0.32 \frac{M_P}{M_N} = 3.63$, $Z_P = Z_N = 1$. G_0 , $G_{0.3}$ and $G_{0.6}$ correspond to $\gamma = 0$, $\gamma = 0.3$ and $\gamma = 0.6$.

Figure 4.2: Variation of sheath thickness with SEE coefficient when $\gamma_P = 0.10$, $\gamma_N = 0.32$, $\frac{M_P}{M_N} = 3.63$, and $Z_P = 1Z_N = 1$.

Figure 4.3: Electric potential variation with normalised distance when $\gamma_P = 0.10$, $\gamma_N = 0.32$, $\gamma = 0.5 \frac{M_P}{M_N} = 3.6315$ and $Z_P = Z_N = 1$.

Figure 4.4: Normalised secondary electron density as a function of normalised distance with $\gamma_P = 0.10$, $\gamma_N = 0.32$, $\gamma = 0.5$, $\frac{M_P}{M_N} = 3.63$ and $Z_P = Z_N = 1$.

Figure 4.5: Electrostatic potential variation with normalised distance for the parameter of negative ions when $\gamma_P = 0.10$, $\gamma_N = 0.32$, $\gamma = 0.5$ and $\frac{M_P}{M_N} = 3.63$.

Figure 4.6: Variation of secondary electron density at sheath edge with electronegativity for the parameter of charge number.

Figure 4.7: Electric potential variation with normalised distance for different mass ratios $\frac{M_P}{M_N}$ (positive ions mass to negative ions mass).

Figure 5.1: Schematic diagram depicting sheath associated with cathode wall emitting beam electrons.

Figure 5.2: (a)Variation of normalised electrostatic potential (b) net space charge density (c) positive and net negative charged species (d) emitted electron beam density as a function of normalized distance for different values of J_b and λ when $M_p = 69$, $M_n = 19$, $\gamma_p = 10$, $\gamma_n =$

10, $\delta_{n0} = 1$, $q=0.99$, $A=0.0005$, $D=0.0015$, $r = 0.005$, $\Phi_c = 25$, $m = 0$, $Z_p = 1$ and $Z_n = 1$.

Figure 5.3: (a) Normalized electric potential (b) net space charge density (c) emitted electron beam density as a function of normalized distance for different values of q and r when $M_p = 69$, $M_n = 19$, $\delta_{n0} = 1$, $\gamma_p = 10$, $\gamma_n = 10$, $A=0.0005$, $D=0.0015$, $\Phi_c = 25$, $J_b = 0.001$, $Z_p = 1$ and $Z_n = 1$.

Figure 5.4: (a) Normalised electric potential (b) normalised electron beam density as a function of normalized distance for different ratio (mass of negative ion to positive ion M_n/ M_p) when $\gamma_p = 10$, $\gamma_n = 10$, $A=0.0005$, $D=0.0015$, $r = 0.05$, $\Phi_c = 25$, $J_b = 0.001$, $\delta_{n0} = 1$, $m = 0$ and $q=0.5$.

Figure 6.1: Schematic diagram depicting the magnetic configuration and secondary electron emission from the wall.

Figure 6.2: Bohm velocity u_{poz} as a function of magnetic field inclination angle θ (in degrees) and electric field ϕ'_0 at the sheath edge for $N_{n0} = 2$, $N_{s0} = 0.008$, $u_{s0} = 1500$, $\mu_s = 1864$, $t_s = 0.05$, $r=0.1$, $\gamma_p = 0.1$, $\gamma_n = 0.1$, $q=0.5$ and $\lambda = 1$.

Figure 6.3: Bohm velocity u_{poz} as a function of ionization parameter r and non-extensivity q for $N_{n0} = 1$, $N_{s0} = 0.008$, $u_{s0} = 1500$, $t_s = 0.1$, $\mu_s = 1864$, $\theta = 30^\circ$, $\phi'_0 = 0.8$, $r = 0.1$, $\gamma_p = 0.001$, $\gamma_n = 0.05$ and $\lambda = 1$.

Figure 6.4: Bohm velocity u_{poz} as a function of positive ion to electron temperature ratio γ_p and collisional parameter λ for $N_{n0} = 2$, $N_{s0} = 0.008$, $u_{s0} = 1500$, $t_s = 0.1$, $\mu_s = 1864$, $\theta = 30^\circ$, $\phi'_0 = 0.1$, $r = 0.1$, $\gamma_n = 0.1$ and $q = 0.5$.

Figure 6.5: Bohm velocity u_{poz} as a function of electronegativity N_{n0} and negative ion to electron temperature ratio γ_n for $N_{s0} = 0.008$, $u_{s0} = 1500$, $t_s = 0.1$, $\mu_s = 1864$, $\phi'_0 = 0.1$, $r = 0.1$, $\gamma_p = 0.1$, $q = 0.5$, $\lambda = 1$, $\theta = 0^\circ$ (yellow region) and $\theta = 30^\circ$ (brown region).

Figure 6.6: Bohm velocity u_{poz} as a function of normalized ionization parameter r for different density of the secondary electrons at the edge of sheath (N_{s0}) and magnetic field inclination angle θ (in degrees) for $N_{n0} = 2$, $u_{s0} = 1500$, $t_s = 0.1$, $\mu_s = 1864$, $\phi'_0 = 0.1$, $\gamma_p = 0.1$, $\gamma_n = 0.1$, $q = 0.5$ and $\lambda = 1$.

Figure 6.7: Bohm velocity u_{poz} as a function of non-extensivity and magnetic field inclination angle θ (in degrees) for (a) collision-less, ionization free, cold ions and zero emission of electrons from the wall (b) collisional, ionization, emission of electrons from wall in electronegative warm plasma.

Figure 6.8: Normalized electrostatic potential as a function of normalized distance for different strength of the magnetic field for $N_{n0} = 2$, $N_{s0} = 2$, $u_{s0} = 100$, $t_s = 0.01$, $\mu_s = 1864$, $\theta = 60^\circ$, $\phi'_0 = 0.01$, $\gamma_p = 0.1$, $r = 1$, $u_{p0} = 3$, $\gamma_n = 0.1$, $q = 1$ and $\lambda = 1$.

Figure 6.9: Normalized electrostatic potential as a function of normalized distance for different strength of the magnetic field for $N_{n0} = 2$, $N_{s0} = 0.001$, $u_{s0} = 100$, $t_s = 0.01$, $\mu_s = 1864$, $\phi'_0 = 0.01$, $\gamma_p = 0.1$, $\gamma_n = 0.1$, $r = 0.1$, $u_{p0} = 3$, $q = 0.97$, $\beta = 0.5$, and $\lambda = 1$.

List of Symbols

- α : Normalized collisional parameter
- β : Ratio of ion cyclotron frequency to the ion plasma frequency
- B: Magnetic field strength
- C_q : Normalization constant
- c_s : Sound/acoustic speed
- δ_p : Normalized positive ion density
- δ_n : Normalized negative ion density
- δ_e : Normalized electron density
- δ_b : Normalized electron beam density
- δ_i : Normalized ion density
- ϵ_0 : Permittivity of the free space
- e : Electronic charge
- η : Normalised electric potential
- γ : Secondary electron emission coefficient
- γ_- : Normalized negative ions temperature
- γ_+ : Normalized positive ions temperature
- j_b : Electron beam current density
- j_C : Electron current density at cathode
- J_i : Normalized ion current density
- J_b : Normalized beam electron current density
- j_n : Negative ion current density
- j_p : Positive ion current density

k_B : Boltzmann constant
 L : Finite plasma size/characteristics length of plasma
 λ_D : Debye length
 Λ : Ionization length
 m_e : Mass of electrons
 M_N : Mass of negative ions
 m_p or M : Mass of positive ions
 μ : Mass ratio of positive ions to electrons
 n_e : Electron density
 n_b : Emitted beam electron density
 n_{e0} : Background density of electrons
 n_{b0} : Background density of electrons
 n_g : Neutral gas density
 n_{N0} : Negative ion density in plasma/background density of negative ions
 n_p or n_i : Positive ions density
 n_n : Negative ion density
 n_s : Density of secondary electrons inside the sheath
 n_{i0} : Background density of positive ions
 n_{n0} : Background density of negative ions
 n_{s0} : Background density of secondary electrons
 N_e : Normalized electron density
 N_i : Normalized Positive ion density
 N_b : Normalised beam electron density
 N_{N0} : Electronegativity

N_P : Normalized positive ion density
 N_S : Normalized secondary electron density
 N_N : Normalised negative ion density
 N_{p0} : Electropositivity
 N_{n0} : Electronegativity
 ω_{ic} : Ion cyclotron frequency
 ω_{pi} : Ion plasma frequency
 v_N : Speed/velocity of negative ions
 v_{N0} : Negative ion velocity at sheath edge
 v_i or v_p : Speed/velocity of positive ions
 ν : Collisional frequency
 ν_{att} : Attachment frequency
 ν_{det} : Detachment frequency
 ν_{iz} : Ionization frequency
 r : Dimensionless factor ranging from -1 to 0
 v_e : Speed/velocity of electrons
 v_b : Speed/velocity of emitted beam electrons
 v_S : Velocity of secondary electrons inside the sheath
 v_{SW} : Velocity of secondary electrons at the wall
 v_{i0} : Positive ion velocity at sheath edge
 v_{px} : Velocity of positive ion in x direction
 v_{py} : Velocity of positive ion in y direction
 v_{pz} : Velocity of positive ion in z direction
 v_{sx} : Velocity of secondary electrons in x direction

v_{sy} : Velocity of secondary electrons in y direction
 v_{sz} : Velocity of secondary electrons in z direction
 Φ : Electric potential inside sheath
 ϕ_{wall} : Electric potential at wall
 Φ : Normalized electric potential
 Φ_0 : Normalized equivalent drop of voltage
 Φ_C : Normalized electric potential at cathode
 ψ' : Normalized electric field
 ψ_{wall} or ψ_P : Normalized potential at the wall/probe
 ψ_0 or ψ_S : Normalized potential at sheath edge
 ψ'_0 or ψ'_S : Normalized electric field at sheath edge
 q : Non-extensivity of the system
 $\sigma(v)$: Momentum-transfer collisional cross-section between the ions and the neutrals
 ρ_n : Net space charge density
 T_e : Temperature of electrons
 t_s : Temperature ratio of secondary electron to plasma electron
 T_n : Temperature of negative ions
 T_p : Temperature of positive ions
 u_i : Normalized velocity of positive ions
 u_p : Normalised positive ion velocity
 u_N : Normalised negative ion velocity
 u_{sw} : Normalised secondary electron velocity at the wall
 u_{px} : Normalised velocity of positive ion in x direction
 u_{py} : Normalised velocity of positive ion in y direction

u_{pz} : Normalised velocity of positive ion in z direction

u_{sx} : Normalised velocity of secondary electrons in x direction

u_{sy} : Normalised velocity of secondary electrons in y direction

u_{sz} : Normalised velocity of secondary electrons in z direction

U_N : Normalized negative ion velocity

U_{N0} : Normalized negative ion velocity at sheath edge

U_P : Normalized positive ion velocity

U_{P0} : Normalized positive ion velocity at sheath edge

V : Voltage inside the sheath with respect to sheath edge

V_C : Voltage at the cathode

V_0 : Equivalent drop of voltage

x : Distance

ξ : Normalized distance

Z_N : Charge on negative ions

Z_P : Charge on positive ions