

**HARMONIC ANALYSIS ASSOCIATED TO VECTOR  
MEASURES ON A COMPACT GROUP**

**MANOJ KUMAR**



**DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI  
FEBRUARY 2021**

© Indian Institute of Technology Delhi (IITD), New Delhi, 2021

**HARMONIC ANALYSIS ASSOCIATED TO VECTOR  
MEASURES ON A COMPACT GROUP**

by

**MANOJ KUMAR**

**Department of Mathematics**

*Submitted*

*in fulfillment of the requirements of the degree of Doctor of Philosophy*

*to the*



**Indian Institute of Technology Delhi  
FEBRUARY 2021**

*Dedicated*  
*to*  
*my parents*

# Certificate

This is to certify that the thesis entitled **Harmonic analysis associated to vector measures on a compact group** submitted by **Mr. Manoj Kumar** to the **Indian Institute of Technology Delhi**, for the award of the Degree of **Doctor of Philosophy**, is a record of the original bonafide research work carried out by him under my guidance and supervision. The thesis has reached the standards fulfilling the requirements of the regulations relating to the degree.

The results contained in this thesis have not been submitted in part or full to any other university or institute for the award of any degree or diploma.

February 2021

New Delhi

**Dr. N. Shravan Kumar**  
Associate Professor  
Dept. of Mathematics  
IIT Delhi, New Delhi

# Acknowledgements

I would like to start by expressing my deepest gratitude to the God for all the blessings bestowed on me by giving the strength and wisdom.

I would like to express my sincere gratitude to my PhD supervisor, Prof. N. Shravan Kumar for his support, encouragement and guidance during the preparation of this thesis. I wish to convey my thanks to my SRC (Student Research Committee) members Prof. S. D. Joshi, Prof. K. Sreenadh and Prof. A. Priyadarshi for their consistent support during my PhD.

My thanks are to all the faculty members of the Department of Mathematics, IIT Delhi. I wish to thank all the staff of the Department of Mathematics, IIT Delhi, for providing the necessary facilities throughout my PhD years. I would like to express my sincere thanks to my friends and research scholars at IIT Delhi for encouragement and support from time to time.

I would like to extend my appreciation to the University Grants Commission, New Delhi, for providing me financial support as a research fellowship during my PhD work.

I would like to thank my parents for their love, affection, encouragement and understanding. Finally, I would acknowledge all supports of my family members.

New Delhi  
February, 2021

Manoj Kumar

# Abstract

This thesis is devoted to the study of certain aspects of the convolution and Fourier transform associated to a vector measure on compact (not necessarily abelian) groups.

Let  $G$  be a compact group. We present some results about the Orlicz space w.r.t. a vector measure on  $G$ . Let  $\nu$  be an absolutely continuous norm integral translation invariant vector measure. Then, we prove that the space  $L^\Phi(\nu)$  is homogeneous. We show that the Haar measure is precisely a Rybakov control measure with some density. With the help of this, we show that the space  $L^\Phi(\nu)$  becomes an  $L^1(G)$ -module with respect to the usual convolution of functions. We determine certain vector measures for which the (weak) Orlicz spaces w.r.t. a vector measure becomes a Banach algebra (with respect to convolution). We also define one more convolution structure on  $L^\Phi(\nu)$ .

We determine the optimal domain and the associated extended operator for both Fourier transform and the convolution operator defined on the classical Orlicz spaces  $L^\Phi(G)$ . In fact, first, we consider the Fourier transform operator obtained by restricting the usual Fourier transform to the space  $L^\Phi(G)$ . On the other hand, there is also a Fourier transform on the space  $L^\Phi(G)$ , obtained by the Hausdorff-Young inequality for Orlicz spaces on compact groups. The convolution operator is considered on Orlicz spaces defined via complex-Radon measures. Further, we

study the properties of the optimal domain and the extended operator.

We introduce and study the Fourier transform of functions which are integrable with respect to a vector measure on  $G$ . We also study the Fourier transform of vector measures. We prove that the Fourier transform operator is completely bounded. We also discuss analogues of the classical uniqueness theorem and the Plancherel theorem. We find a sufficient condition for an analogue of the classical Riemann-Lebesgue Lemma to hold. We also introduce and study convolution of functions from  $L^p$ -spaces associated to a vector measure. We prove some analogues of the classical Young's inequalities. Similarly, we also study convolution of a scalar measure and vector measures.

# सार

यह शोध प्रबंध कॉम्पैक्ट (जरूरी नहीं कि एबेलियन) समूहों पर सदिश माप से जुड़े कॉवोलुशन और फूरियर रूपांतरण के कुछ पहलुओं के अध्ययन के लिए समर्पित है।

आज़ा देना  $G$  एक कॉम्पैक्ट समूह है। हम  $G$  पर एक सदिश माप के संबंध में ओर्लिकज़ स्पेस के बारे में कुछ परिणाम प्रस्तुत करते हैं। बता दें कि  $\nu$  एक बिल्कुल सतत नॉर्म इंटीग्रल ट्रांसलेशन-अपरिवर्तनीय सदिश माप है। फिर, हम साबित करते हैं कि स्पेस  $L^\Phi(\nu)$  होमोजेनियस है। हम बताते हैं कि हार माप कुछ घनत्व के साथ एक रिबाकोव नियंत्रण माप है। इसकी सहायता से, हम दिखाते हैं कि स्पेस  $L^\Phi(\nu)$  फंक्शन्स के सामान्य कॉवोलुशन के संबंध में  $L^1(G)$ -मॉड्यूल बन गया है। हम कुछ सदिश माप का निर्धारण करते हैं जिसके लिए एक सदिश माप के संबंध में (कमजोर) ओर्लिकज़ स्पेस एक बनक अलजेब्रा (कॉवोलुशन के संबंध में) बन जाता है। हम  $L^\Phi(\nu)$  पर एक और कॉवोलुशन संरचना को भी परिभाषित करते हैं।

हम क्लासिकल ओर्लिकज़ स्पेसेस  $L^\Phi(G)$  पर परिभाषित फूरियर रूपांतरण और कॉवोलुशन ऑपरेटर के लिए इष्टतम डोमेन और संबंधित विस्तारित ऑपरेटर का निर्धारण करते हैं। वास्तव में, सबसे पहले, हम सामान्य फूरियर रूपांतरण को स्पेस  $L^\Phi(G)$  में सीमित करके प्राप्त फूरियर रूपांतरण ऑपरेटर पर विचार करते हैं। दूसरी ओर, कॉम्पैक्ट समूहों पर ओर्लिकज़ स्पेसेस के लिए हॉसडॉर्फ-यंग असमानता द्वारा प्राप्त, स्पेस  $L^\Phi(G)$  पर एक फूरियर रूपांतरण भी है। कॉम्प्लेक्स-रैडॉन मापों के माध्यम से परिभाषित ओर्लिकज़ स्पेसेस पर कॉवोलुशन ऑपरेटर पर विचार किया जाता है। इसके अलावा, हम इष्टतम डोमेन और विस्तारित ऑपरेटर के गुणों का अध्ययन करते हैं।

हम उन फंक्शन्स के फूरियर रूपांतरण का परिचय देते हैं और अध्ययन करते हैं जो  $G$  पर सदिश माप के संबंध में इंटेग्रेबल होते हैं। हम सदिश मापों के फूरियर रूपांतरण का भी अध्ययन करते हैं। हम साबित करते हैं कि फूरियर रूपांतरण ऑपरेटर कम्प्लीटली बाउंडेड है। हम क्लासिकल विशिष्टता प्रमेय और प्लेंचरेल प्रमेय के एनालॉग्स पर भी चर्चा करते हैं। हम क्लासिकल रीमैन-लेबेस्गए लेम्मा के एनालॉग को धारण करने के लिए एक पर्याप्त स्थिति पाते हैं। हम एक सदिश माप से जुड़े  $L^p$ -स्पेसेस से फंक्शन्स के कॉवोलुशन का परिचय और अध्ययन भी करते हैं। हम क्लासिकल यंग की असमानताओं के कुछ एनालॉग्स को साबित करते हैं। इसी तरह, हम एक सदिश माप और सदिश मापों के कॉवोलुशन का भी अध्ययन करते हैं।

# Contents

<b>Certificate</b>	<b>i</b>
<b>Acknowledgements</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>List of Symbols</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 General . . . . .	1
1.2 Present work . . . . .	5
<b>2 Preliminaries</b>	<b>9</b>
2.1 Fourier analysis on compact groups . . . . .	9
2.2 Orlicz Spaces . . . . .	11
2.3 Vector measures . . . . .	12
2.4 Integration w.r.t. a vector measure and the associated $L^p$ -spaces . . . . .	14
2.5 Orlicz spaces associated to vector measures . . . . .	16
2.6 Operator Spaces . . . . .	16
<b>3 Convolution structures for an Orlicz space</b>	<b>19</b>

---

3.1	Homogeneity of the space $L^\Phi(\nu)$ . . . . .	20
3.2	Convolution product for $L_w^\Phi(\nu)$ and $L^\Phi(\nu)$ . . . . .	25
3.3	Another convolution product for $L_w^\Phi(\nu)$ and $L^\Phi(\nu)$ . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Optimal extension of the Fourier transform and convolution operator</b>	<b>33</b>
4.1	Optimal extension of the Fourier transform . . . . .	35
4.1.1	Optimal extension of $c_0$ -valued Fourier transform . . . . .	36
4.1.2	Optimal extension of the Hausdorff-Young inequality . . . . .	38
4.2	Optimal extension of the convolution operator . . . . .	40
4.2.1	Optimal extension . . . . .	40
4.2.2	Properties of the optimal domain . . . . .	45
4.2.3	Compactness of the extended operator . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Fourier analysis of vector measures</b>	<b>51</b>
5.1	Tensor integrability . . . . .	53
5.2	Fourier transform for $L^1(\nu)$ and $L_w^1(\nu)$ . . . . .	56
5.3	Invariant measures . . . . .	61
5.4	Convolution of functions associated to vector measures . . . . .	63
5.5	Fourier transform of vector measures . . . . .	68
5.6	Convolution of a vector measure and a scalar measure . . . . .	70
5.7	Integrability properties of the convolution product . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Future Work</b>	<b>77</b>
	<b>Bibliography</b>	<b>81</b>
	<b>Bio-data</b>	<b>87</b>

# List of Symbols

## Symbol    Meaning

$\forall$	for all
$=$	equal to
$\neq$	not equal to
$\in$	belongs to
$\notin$	does not belong
$\subset$	subset or equal
$\cup, \cap$	union, intersection
$\emptyset$	empty set
$\mathbb{N}$	the set of natural numbers
$\mathbb{R}$	the set of real numbers

- $G$  the compact group
- $m_G$  the normalized Haar measure on  $G$
- $\widehat{G}$  the dual object of  $G$
- $S(G)$  the space of complex-valued simple functions on  $G$
- $C(G)$  the space of complex-valued continuous functions on  $G$
- $M(G)$  the space of complex Radon measures on  $G$
- $\delta_x$  the Dirac-delta measure at  $x$
- $\widehat{f}$  the Fourier transform of  $f$
- w.r.t. with respect to
- a.e. almost everywhere