

CONSTRAINED ADAPTIVE CONTROL OF UNCERTAIN SYSTEMS

POULOMEE GHOSH



**DEPARTMENT OF ELECTRICAL ENGINEERING
INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI
JULY 2026**

©Indian Institute of Technology Delhi (IITD), New Delhi, 2026

CONSTRAINED ADAPTIVE CONTROL OF UNCERTAIN SYSTEMS

by

Poulomee Ghosh

Department of Electrical Engineering

Submitted

in fulfillment of the requirements of the degree of Doctor of Philosophy

to the



INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI

July 2026

Dedicated to my দাদু, Abani Bhushan Ghosh.

CERTIFICATE

This is to certify that the thesis entitled **Constrained Adaptive Control of Uncertain Systems** submitted by **Poulomee Ghosh (Entry No. 2020EEZ8436)** to the Indian Institute of Technology Delhi, for the award of the Degree of **Doctor of Philosophy**, is a record of the bona fide research work carried out by her under my supervision and guidance. The thesis has reached the standards fulfilling the requirements of the regulations relating to the degree. The results contained in this thesis have not been submitted either in part or in full to any other university or institute for the award of any degree or diploma to the best of my knowledge.

Dr. Shubhendu Bhasin

July 2, 2026

Professor

Department of Electrical Engineering
Indian Institute of Technology Delhi

ACKNOWLEDGEMENTS

I would like to express my heartfelt gratitude to my supervisor, Prof. Shubhendu Bhasin, for his constant guidance, encouragement, and unwavering support throughout my Ph.D. journey. His trust, patience, and belief in my abilities helped me navigate many challenges and difficult phases along the way. I am truly thankful to him for shaping my research outlook and for giving me the freedom and confidence to grow as a researcher.

I sincerely thank my SRC members, Prof. I. N. Kar, Prof. S. Janardhanan, and Prof. H. Kodamana, for their constructive feedback and suggestions throughout my doctoral tenure.

I remain deeply grateful to my teachers, including Baba, Ma, Kaka and Suman da for playing an important role in shaping my academic foundation and love for learning. I feel fortunate to have been surrounded by extremely talented labmates, whose dedication and passion for research were contagious. I also thank my friends, colleagues, seniors and juniors for many technical discussions, constant encouragement, and much-needed tea breaks.

To my parents, I owe more than this page can hold. My father was the first person who encouraged me to pursue a Ph.D. and envisioned this path for me even before I could fully see it for myself. He, along with my mother, gave me the courage to believe that I could achieve things I had not yet dared to expect from myself. Their love, sacrifices, blessings, and belief have been the strongest foundation of my life, and this achievement belongs to them as much as it belongs to me.

Finally, I feel deeply blessed for the love and kindness I received from so many people throughout this journey. In their own ways, whether through support, encouragement, or life's difficult lessons, the people I met helped me learn, grow, and continue striving to become a better version of myself.

Poulomee Ghosh
New Delhi

ABSTRACT

Satisfaction of state and input constraints is one of the most critical requirements in control engineering applications, especially in safety-critical systems. The constrained control problem becomes even more challenging in the presence of uncertainties and disturbances. In classical adaptive control formulations, although the states and the input remain bounded, the bounds are neither user-defined nor known a priori. This dissertation presents a constrained adaptive control framework for uncertain systems in the presence of plant uncertainties and bounded external disturbances. The study begins with the development of state and input constrained adaptive controllers for both multi-input multi-output (MIMO) linear time-invariant (LTI) systems and Euler–Lagrange (E–L) systems. In these designs, a barrier Lyapunov function (BLF) is strategically integrated with a saturated control law to ensure that the plant states and control input remain within user-defined bounds. Unlike popular optimization-based approaches for constrained control, such as model predictive control (MPC) and control barrier function (CBF) that solve a constrained optimization problem at each step using the system model, the proposed approach is optimization-free and adaptive. A key contribution is to derive offline, verifiable feasibility conditions that certify the existence of an admissible control policy. Projection-based adaptive update law ensures robustness in the presence of bounded disturbances. Furthermore, in many practical systems, actuator dynamics and hardware limitations impose constraints not only on the magnitude of the control input but also on the rate at which the input can vary; neglecting these limitations can lead to actuator saturation, chattering, or hardware degradation. Motivated by this, the state and input constrained adaptive control framework is subsequently extended to incorporate predefined actuator rate limits for uncertain MIMO LTI systems. A two-layer BLF-based adaptive control architecture is proposed that simultaneously guarantees the satisfaction of state, input magnitude, and input rate constraints, ensuring safe and feasible operation of uncertain systems without relying on online optimization.

Building upon these results, the framework is further extended to address time-varying state and input constraints under parametric uncertainties and disturbances for both uncertain MIMO LTI and uncertain E–L systems. A time-varying barrier Lyapunov function (TVBLF) is introduced to enforce dynamic constraint envelopes, and a saturated control law guarantees that the control input also remains within a time-varying limit. An offline verifiable sufficient feasibility condition is derived to check the feasibility of any given constraint set. Simulation and experimental results on a 2-DoF helicopter validate the efficacy of the proposed framework.

सार

नियंत्रण अभियांत्रिकी के अनुप्रयोगों, विशेषकर सुरक्षा-महत्वपूर्ण प्रणालियों में, अवस्थाओं तथा नियंत्रण इनपुट पर लगाए गए बंधनों की संतुष्टि अत्यंत आवश्यक होती है। पारंपरिक अनुकूली नियंत्रण संरचनाओं में यद्यपि अवस्थाएँ और इनपुट सीमित रहते हैं, तथापि ये सीमाएँ न तो उपयोगकर्ता द्वारा पूर्वनिर्धारित होती हैं और न ही पूर्वानुमेय। इस शोधप्रबंध में अनिश्चित प्रणालियों के लिए, जिनमें तंत्र पैरामीटरों की अनिश्चितता तथा सीमित बाह्य विक्षोभ उपस्थित हों, एक बाधा-संतुष्ट अनुकूली नियंत्रण रूपरेखा प्रस्तुत की गई है।

प्रारंभ में बहु-इनपुट बहु-आउटपुट रैखिक समय-अपरिवर्ती प्रणालियों तथा यूलर-लाग्रांज प्रणालियों के लिए अवस्था और इनपुट-बाधित अनुकूली नियंत्रकों का विकास किया गया है। प्रस्तावित संरचना में बैरियर लियापुनोव फलन को संतुष्ट नियंत्रण नियम के साथ रणनीतिक रूप से संयोजित किया गया है, जिससे यह सुनिश्चित होता है कि तंत्र की अवस्थाएँ और नियंत्रण इनपुट उपयोगकर्ता द्वारा निर्धारित सीमाओं के भीतर ही बने रहें। मॉडल प्रिडिक्टिव कंट्रोल तथा कंट्रोल बैरियर फंक्शन जैसे लोकप्रिय सर्वोत्तमीकरण-आधारित दृष्टिकोणों के विपरीत, जिनमें प्रत्येक समय-चरण पर तंत्र मॉडल का उपयोग करते हुए एक बाधित सर्वोत्तमीकरण समस्या का समाधान करना पड़ता है, प्रस्तावित पद्धति सर्वोत्तमीकरण-मुक्त तथा पूर्णतः अनुकूली है। इस कार्य का एक प्रमुख योगदान एक ऑफ़लाइन सत्यापन योग्य व्यवहार्यता शर्त का व्युत्पादन है, जो किसी दिए गए बाधा-समुच्चय के लिए उपयुक्त नियंत्रण नीति के अस्तित्व को प्रमाणित करती है तथा उपयोगकर्ता द्वारा निर्धारित अवस्था, इनपुट और विक्षोभ सीमाओं के मध्य अंतर्संबंध एवं अंतर्निहित समझौतों को स्पष्ट करती है। प्रक्षेपण-आधारित अनुकूली अद्यतन नियम सीमित विक्षोभों की उपस्थिति में सुदृढ़ता सुनिश्चित करता है।

व्यावहारिक प्रणालियों में प्रायः एक्टुएटर गतिकी एवं हार्डवेयर सीमाएँ न केवल नियंत्रण इनपुट के परिमाण पर, बल्कि उसके परिवर्तन-दर पर भी बंधन आरोपित करती हैं। इन सीमाओं की उपेक्षा से संतृप्ति, चटरिंग अथवा हार्डवेयर क्षति की संभावना उत्पन्न हो सकती है। इस प्रेरणा से, प्रस्तावित बाधा-संतुष्ट अनुकूली नियंत्रण ढाँचे का विस्तार कर अनिश्चित बहु-इनपुट बहु-आउटपुट रैखिक समय-अपरिवर्ती प्रणालियों के लिए पूर्वनिर्धारित इनपुट-दर सीमाओं को भी सम्मिलित किया गया है। एक द्वि-स्तरीय बैरियर लियापुनोव फलन आधारित अनुकूली नियंत्रण वास्तुकला विकसित की गई है, जो अवस्था, इनपुट परिमाण तथा इनपुट-दर—तीनों प्रकार की बाधाओं की एक साथ संतुष्टि सुनिश्चित करती है, तथा बिना ऑनलाइन अनुकूलन के सुरक्षित और व्यवहार्य संचालन प्रदान करती है।

उपरोक्त परिणामों के आधार पर, इस रूपरेखा का और विस्तार समय-परिवर्ती अवस्था तथा इनपुट बाधाओं के परिप्रेक्ष्य में किया गया है, जहाँ पैरामीट्रिक अनिश्चितताएँ तथा विक्षोभ उपस्थित हों। इस उद्देश्य से एक समय-परिवर्ती बैरियर लियापुनोव फलन प्रस्तुत किया गया है, जो गतिशील बाधा-आवरणों को लागू करता है, तथा संतुष्ट नियंत्रण नियम समय-परिवर्ती इनपुट सीमाओं का भी पालन सुनिश्चित करता है। किसी भी प्रदत्त बाधा-समुच्चय की व्यवहार्यता जाँचने हेतु एक ऑफ़लाइन सत्यापन योग्य पर्याप्त शर्त का व्युत्पादन किया गया है। संगणकीय अनुकरणों तथा द्वि-स्वतंत्रता-डिग्री हेलीकॉप्टर पर किए गए प्रायोगिक परीक्षणों द्वारा प्रस्तावित रूपरेखा की प्रभावशीलता का सफलतापूर्वक सत्यापन किया गया है।

সারসংক্ষেপ

বাস্তব জীবনের বহু নিয়ন্ত্রণ ব্যবস্থায় নিরাপত্তা একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। কোনো যন্ত্র, রোবট, উড়োজাহাজ, অথবা অন্য কোনো গতিশীল ব্যবস্থা পরিচালনার সময় তার অবস্থান, গতি, কিংবা প্রয়োগকৃত নিয়ন্ত্রণ ইনপুট যেন নির্ধারিত সীমার বাইরে না যায়, তা নিশ্চিত করা জরুরি। তবে বাস্তব প্রয়োগে সিস্টেমের সঠিক গাণিতিক মডেল এবং সংশ্লিষ্ট পরামিতিগুলি সাধারণত পূর্বনির্ধারিতভাবে উপলব্ধ থাকে না। গাণিতিক মডেলের অনিশ্চয়তা, বাহ্যিক ব্যাঘাতের প্রভাব, এবং কার্যকরী যন্ত্রাংশের ভৌত সীমাবদ্ধতা নিয়ন্ত্রণ কাঠামোকে আরও জটিল করে তোলে। ফলে কেবল নির্ধারিত কাজ সম্পন্ন করাই যথেষ্ট নয়; বরং অনিশ্চয়তা ও সীমাবদ্ধতার উপস্থিতিতেও সেই কাজটি নিরাপদ ও বাস্তবায়নযোগ্য পরিসরের মধ্যে সম্পন্ন করা জরুরি। এই লক্ষ্যে, এই গবেষণায় অনিশ্চিত গতিশীল ব্যবস্থার জন্য একটি সীমাবদ্ধতা-সচেতন অভিযোজিত নিয়ন্ত্রণ কাঠামো প্রস্তাব করা হয়েছে, যা সিস্টেমের অজানা পরামিতি ও মডেলগত অনিশ্চয়তার প্রভাব বিবেচনা করে ব্যবহারকারী-নির্ধারিত নিরাপদ সীমা বজায় রাখতে সক্ষম। উল্লেখযোগ্যভাবে, প্রচলিত সীমাবদ্ধ নিয়ন্ত্রণ পদ্ধতিগুলির ন্যায় প্রতিটি সময়ধাপে গণনাগতভাবে ব্যয়বহুল অপটিমাইজেশন সমস্যা সমাধানের উপর নির্ভর না করেই, প্রস্তাবিত নিয়ন্ত্রক সিস্টেমের অবস্থা ও নিয়ন্ত্রণ ইনপুটকে নির্ধারিত সীমার মধ্যে রাখে এবং সীমাবদ্ধ বহিঃব্যাঘাতের উপস্থিতিতেও সিস্টেমের স্থিতিশীলতা নিশ্চিত করে।

গবেষণার প্রথম অংশে বহু-ইনপুট বহু-আউটপুট রৈখিক সময়-অপরিবর্তনীয় ব্যবস্থা এবং অয়লার-ল্যাগ্রাঞ্জ ব্যবস্থার জন্য অবস্থা ও ইনপুট-সীমাবদ্ধ অভিযোজিত নিয়ন্ত্রক নির্মাণ করা হয়েছে। এই নকশায় ব্যারিয়ার লিয়াপুনভ ফাংশনকে সম্পৃক্ত নিয়ন্ত্রণ সূত্রের সঙ্গে সমন্বিত করা হয়েছে, যাতে সিস্টেমের অবস্থা ও নিয়ন্ত্রণ ইনপুট ব্যবহারকারী-নির্ধারিত সীমার মধ্যে থাকে। প্রস্তাবিত পদ্ধতিটি অপটিমাইজেশন-মুক্ত এবং গণনাগতভাবে তুলনামূলক সহজ, যা অনিশ্চিত সিস্টেমে নিরাপদ সীমাবদ্ধ নিয়ন্ত্রণ বাস্তবায়নে বিশেষভাবে উপযোগী। এই গবেষণার একটি গুরুত্বপূর্ণ অবদান হলো এমন কিছু পূর্ব-যাচাইযোগ্য সম্ভাব্যতা শর্ত নির্ণয় করা, যেগুলির সাহায্যে নিয়ন্ত্রক প্রয়োগের আগেই নির্ধারণ করা যায় যে নির্দিষ্ট অবস্থা-সীমা, ইনপুট-সীমা এবং ব্যাঘাত-সীমার জন্য একটি গ্রহণযোগ্য নিয়ন্ত্রণ নীতি বিদ্যমান কি না। এই শর্তগুলি ব্যবহারকারী-নির্ধারিত বিভিন্ন সীমাবদ্ধতার মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক এবং একটির পরিবর্তনে অন্যটির উপর কী প্রভাব পড়ে, তা বুঝতেও সাহায্য করে।

অনেক বাস্তব ব্যবস্থায় কার্যকরী যন্ত্রাংশের সীমাবদ্ধতা শুধু নিয়ন্ত্রণ ইনপুটের মানের উপর নয়, বরং ইনপুট কত দ্রুত পরিবর্তিত হতে পারে, তার উপরও নির্ভর করে। এই পরিবর্তনের হার উপেক্ষা করলে যন্ত্রাংশে সম্পৃক্ততা, অনাকাঙ্ক্ষিত কম্পন, অথবা হার্ডওয়্যারের ক্ষতি হতে পারে। এই কারণে, এই গবেষণায় অবস্থা ও ইনপুট-সীমাবদ্ধ অভিযোজিত নিয়ন্ত্রণ কাঠামোটি আরও সম্প্রসারিত করে ইনপুটের পরিবর্তনের হারের সীমাবদ্ধতাও অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। এর জন্য দুই-স্তরবিশিষ্ট ব্যারিয়ার লিয়াপুনভ ফাংশন-ভিত্তিক একটি অভিযোজিত নিয়ন্ত্রণ পদ্ধতি প্রস্তাব করা হয়েছে, যা একই সঙ্গে অবস্থা, নিয়ন্ত্রণ ইনপুটের মান, এবং ইনপুটের পরিবর্তনের হারকে পূর্বনির্ধারিত সীমার মধ্যে রাখতে সক্ষম।

গবেষণার শেষ অংশে প্রস্তাবিত কাঠামোকে সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত অবস্থা ও ইনপুট সীমাবদ্ধতার ক্ষেত্রে সম্প্রসারিত করা হয়েছে। বাস্তব প্রয়োগে নিরাপদ সীমাগুলি সবসময় স্থির থাকে না; বরং কাজের ধাপ, পরিবেশগত অবস্থা, অথবা সময়ের পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে এই সীমাগুলিও পরিবর্তিত হতে পারে। এ ধরনের পরিস্থিতি মোকাবিলা করার জন্য সময়-পরিবর্তনশীল ব্যারিয়ার লিয়াপুনভ ফাংশনের ভিত্তিতে একটি

নিয়ন্ত্রণ পদ্ধতি প্রস্তাব করা হয়েছে, যার মাধ্যমে পরিবর্তনশীল নিরাপদ সীমা বজায় রাখা সম্ভব হয়। একই সঙ্গে, সম্পূর্ণ নিয়ন্ত্রণ সূত্র ব্যবহার করে নিয়ন্ত্রণ ইনপুটকেও সময়-পরিবর্তনশীল সীমার মধ্যে রাখা হয়েছে। প্রস্তাবিত পদ্ধতিটি বহু-ইনপুট বহু-আউটপুট রৈখিক সময়-অপরিবর্তনীয় ব্যবস্থা এবং অয়লার-ল্যাগ্রাঞ্জ ব্যবস্থা, উভয়ের ক্ষেত্রেই প্রয়োগ করা হয়েছে।

প্রস্তাবিত নিয়ন্ত্রণ পদ্ধতিগুলির কার্যকারিতা সংখ্যাাত্ত্বিক অনুকরণ এবং দুই-স্বাধীনতা-ডিগ্রির হেলিকপ্টার ব্যবস্থায় পরীক্ষার মাধ্যমে যাচাই করা হয়েছে। প্রাপ্ত ফলাফল থেকে দেখা যায় যে অনিশ্চয়তা ও সীমাবদ্ধ বহিঃব্যবস্থার উপস্থিতিতেও প্রস্তাবিত অভিযোজিত নিয়ন্ত্রণ কাঠামো অবস্থা, ইনপুট এবং ইনপুট পরিবর্তনের হারের সীমাবদ্ধতা কার্যকরভাবে বজায় রাখতে সক্ষম। সামগ্রিকভাবে, এই গবেষণায় এমন একটি নিয়ন্ত্রণ কাঠামো উপস্থাপন করা হয়েছে, যা নিরাপত্তা, অভিযোজনক্ষমতা এবং বাস্তবায়নযোগ্যতার মধ্যে একটি সুসংহত সমন্বয় স্থাপন করে।

Contents

CERTIFICATE	i
ACKNOWLEDGEMENTS	iii
ABSTRACT	v
সার	vii
সারসংক্ষেপ	ix
Contents	xi
List of Figures	xv
List of Tables	xvii
Abbreviations	xxi
Nomenclature	xxiii
1 Introduction	1
1.1 Problem Statements and Key Challenges	2
1.2 Literature Review	5
1.3 Contribution of the Thesis	8
1.4 Organization of the Thesis	9
2 Preliminaries	11
2.1 Constrained Control	11
2.1.1 Notion of Safety and Forward Invariance	11
2.1.2 Barrier Lyapunov Function (BLF)	13
2.2 Adaptive Control	16
2.2.1 Classical Adaptive Control	16
2.2.2 Adaptive Control of E–L Systems	17
2.2.3 Model Reference Adaptive Control (MRAC)	21

3	Adaptive Control with State and Input Constraints	27
3.1	Introduction	27
3.2	MRAC of Uncertain MIMO LTI Systems with State and Input Constraints	28
3.2.1	Problem Formulation	29
3.2.2	Proposed Methodology	30
3.2.2.1	Saturated Controller Design	30
3.2.2.2	BLF Design	31
3.2.2.3	BLF-based Adaptive Update Law	31
3.2.2.4	Stability and Feasibility Analysis	32
3.2.3	Discussion on Feasibility Condition	36
3.2.4	Simulation Results	41
3.2.5	Discussion and Comparison with CBF-based Methods	44
3.3	Adaptive Control of Uncertain E–L Systems with State and Input Constraints	45
3.3.1	Problem Formulation	46
3.3.2	Proposed Methodology	46
3.3.2.1	Constraint Transformation	46
3.3.2.2	Saturated Controller Design	48
3.3.2.3	BLF Design	49
3.3.2.4	BLF-based Adaptive Update Law	50
3.3.2.5	Stability and Feasibility Analysis	50
3.3.3	Discussion on the Feasibility Condition	54
3.3.4	Simulation and Experimental Results	55
3.4	Conclusion	62
4	State Constrained Adaptive Control with Input Magnitude and Rate Limits	65
4.1	Introduction	65
4.2	Problem Formulation	67
4.3	Proposed Methodology	68
4.3.1	Control law design	68
4.3.2	BLF Design	69
4.3.3	BLF-based Adaptive Update Law	69
4.3.4	Stability and Feasibility Analysis	70
4.4	Discussion on Feasibility Conditions	75
4.5	Simulation Results	76
4.6	Conclusion	83
5	Adaptive Control with Time-Varying State and Input Constraints	85
5.1	Introduction	85
5.2	Preliminaries	87
5.3	MRAC of Uncertain MIMO LTI Systems with Time-varying State and Input Constraints	88
5.3.1	Problem Formulation	89
5.3.2	Proposed Methodology	90

5.3.2.1	Saturated Control Design	90
5.3.2.2	TVBLF Design	91
5.3.2.3	TVBLF-Based Adaptive Update Law	91
5.3.2.4	Stability and Feasibility Analysis	91
5.3.3	Discussion on the Feasibility Condition	96
5.3.4	Designing Constraints as Performance Functions	98
5.3.5	Simulation Results	102
5.4	Adaptive control of Uncertain E–L Systems with Time-varying State and Input constraints	107
5.4.1	Problem Formulation	107
5.4.2	Proposed Methodology	108
5.4.2.1	Constraint Transformation	108
5.4.2.2	Error Dynamics	110
5.4.2.3	Saturated Controller Design	110
5.4.2.4	TVBLF Design	112
5.4.2.5	TVBLF-Based Adaptive Update Law	113
5.4.2.6	Stability and Feasibility Analysis	113
5.4.3	Discussion on Feasibility Condition	116
5.4.4	Experimental Results	117
5.5	Conclusion	120
6	Conclusion and Prospects for Future Research	123
6.1	Summary	123
6.2	Prospective Future Research Directions	125
6.2.1	Reduction of Conservatism in Feasibility Conditions	125
6.2.2	Constraint Generalization	125
6.2.3	Extension to Output-Feedback Adaptive Control	125
6.2.4	Integration with Data-Driven Methods	126
6.2.5	Integration with Event-Triggered or Self-Triggered Control	126
6.2.6	Extension to Higher-Order Nonlinear Systems	126
	References	129
	Appendix	137
	List of Publications	147
	Biodata	151

List of Figures

2.1	Graphical representation of safe region, unsafe region, and the evolution of system trajectory with time.	13
2.2	(a) Logarithmic BLF ($V(z) = \log \left(\frac{\bar{z}^2}{\bar{z}^2 - z^2} \right)$) with varying safe boundaries. . .	15
2.3	Direct MRAC architecture	23
3.1	Feasible sets for (a) varying α when $\alpha > 0$, (b) varying $ \alpha $ when $\alpha < 1$, (c) varying β and (d) for both $\alpha > 0$ and $\alpha < 0$	38
3.2	Feasible set for (a) Case 1.1 and (b) Case 1.2.	39
3.3	Example of an auxiliary reference trajectory ($x_a(t)$) designed for $x_r = 5 \sin(t)$ with $\mathcal{X}_a = 1.8$	40
3.4	Feasibility set for the plant (3.42) and the reference model (3.43) using (3.5), (3.9) and (3.13).	41
3.5	Comparative analysis of (a) tracking performance, (b) tracking error, and (c) control input using the proposed controller and robust MRAC.	42
3.6	Performance using the proposed controller with $\bar{\mathcal{X}} = 0.5$, $\bar{\mathcal{X}}_a = 0.3$, $\bar{\mathcal{U}} = 2$ and $\bar{d} = 1$	43
3.7	Quanser 2-DoF helicopter model	56
3.8	Simulation results of tracking performances and control input of the 2-DoF helicopter model using the proposed controller.	59
3.9	Comparison of trajectory tracking errors and required control input using the proposed controller (blue) and a robust adaptive tracking controller (red) in presence of bounded external disturbances ($\bar{d} = 5.65$). The black dashed lines represent the corresponding user-defined bounds ($\mathcal{E}_Q = 0.06$, $\mathcal{E}_Y = 0.086$, $\bar{\tau} = 7$).	60
3.10	Experimental setup of Quanser 2-DoF Helicopter	61
3.11	Experimental results using the proposed controller; (a) tracking performance of pitch angle; (b) tracking performance of yaw angle; (c) tracking performance of pitch rate; (d) tracking performance of yaw rate; (e) angular position tracking error; (f) angular velocity tracking error; (g) required torque.	63
4.1	Tracking performance, input magnitude, and input rate using the proposed method of (a) Example 1 and (b) Example 2.	78
4.2	Feasibility Region	80
4.3	Comparison of tracking performance with the proposed controller and robust MRAC.	80

4.4	Comparison of input magnitude with the proposed controller and robust MRAC.	81
4.5	Comparison of input rate with the proposed controller and robust MRAC.	81
5.1	BLF $\left(V = \log \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - e^2} \right)$ with fixed and time-varying bounds.	88
5.2	Saturated input using (5.8) with $\phi_u(t) = 4.8 \exp(-t) + 0.2$	90
5.3	Effect of varying (a) κ on the performance function $\phi_x(t)$, where $\phi_x^0 = 2$, $\phi_x^\infty = 0.1$, $\epsilon = 0.2$ and $\nu = 1$. (b) ν on the performance function $\phi_x(t)$, where $\phi_x^0 = 2$, $\phi_x^\infty = 0.1$, $\epsilon = 0.2$ and $\kappa = 1$	100
5.4	Example 1: simulation results using proposed method– (a) tracking performance, (c) tracking error, (e) control input. Example 2: simulation results using proposed method with disturbance (5.53)– (b) tracking performance, (d) tracking error, (f) control input.	104
5.5	(a) Tracking performance and (b) tracking error using proposed method with measurement noise (5.54), $\sigma^2 = 0.05$. $u_m(t) \in \mathbb{R}^m$ denotes the input under measurement noise.	105
5.6	Control input using proposed method with measurement noise (5.54), $\sigma^2 = 0.05$. $u_m(t) \in \mathbb{R}^m$ denotes the input under measurement noise.	106
5.7	Simplified block diagram of the Quanser 2-DoF helicopter.	118
5.8	Experimental results using the proposed controller: tracking performance of (a) pitch angle, (b) pitch rate, (c) yaw angle and (d) yaw rate; tracking error of generalized (e) position and (f) velocity; (g) required torque.	119

List of Tables

3.1	Value of the model parameters with significance and units.	58
4.1	Value of the parameters [1] used in simulation of (4.41).	79
4.2	Quantitative comparison of the proposed method with robust MRAC over [0 T] and $T = 20$ s.	81
5.1	Effect of σ^2 on P_{avg}	106

List of Algorithms

1	Feasibility Check of the Constraint Set $\{\mathcal{E}_Q, \mathcal{E}_V, \bar{\tau}\}$	55
2	Feasibility Check of the Constraint Set $\{\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{U}}_1, \bar{\mathcal{U}}_2\}$	76
3	Parameter Tuning Guideline	77
4	Feasibility Check for $\{\phi_e(t), \phi_{\hat{e}}(t), \phi_{\tau}(t)\}$	117

Abbreviations

MRAC	Model Reference Adaptive Control
MIMO	Multi-Input Multi-Output
LTI	Linear Time-invariant
E-L	Euler-Lagrange
BLF	Barrier Lyapunov Function
TVBLF	Time-varying Barrier Lyapunov Function
CBF	Control Barrier Function
MPC	Model Predictive Control
PPC	Prescribed Performance Control
FC	Funnel Control
PPF	Prescribed Performance Function

Nomenclature

$\mathbb{R}$	Real Space
$\mathbb{R}^n$	Real Vector Space of Dimension n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Real Matrix Space of Dimension $n \times m$
$\mathbb{I}_{n \times n}$	Identity Matrix of Dimension $n \times n$
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	Set of All Positive Real Numbers
$\mathbb{R}_{> 0}$	Set of All Strictly Positive Real Numbers
$\mathbf{0}_{n \times m}$	Matrix Sized $n \times m$ with All Elements Set to Zero
$\text{tr}(\cdot)$	Trace of $(\cdot)$
$\lambda_{\min}(\mathbf{P})$	Minimum Eigen Value of Matrix $\mathbf{P}$
$\lambda_{\max}(\mathbf{P})$	Maximum Eigen Value of Matrix $\mathbf{P}$
$\ \mathbf{x}\ $	Euclidean Norm of a Vector $\mathbf{x}$
$\log(\cdot)$	Natural Logarithmic of $(\cdot)$
$\mathcal{L}_2$	Set of Square Integrable Signals on $[0, \infty)$
$\mathcal{L}_\infty$	Set of Bounded Signals on $[0, \infty)$
$\exists$	There Exists
$\forall$	For All
$\mathbf{P}^\dagger$	Moore-Penrose Pseudoinverse of a Matrix $\mathbf{P}$