Harmonic and Non-Harmonic Analysis of Pseudo-differential and Fourier Integral Operators

Lalit Mohan

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI
January 2025

Harmonic and Non-Harmonic Analysis of Pseudo-differential and Fourier Integral Operators

by

Lalit Mohan
Department of Mathematics

Submitted

in fulfillment of the requirements of the degree of Doctor of Philosophy

to the

Indian Institute of Technology Delhi

January 2025

Dedicated to my parents.

Certificate

This is to certify that the thesis entitled **Harmonic and Non-Harmonic Analysis of Pseudo-differential and Fourier Integral Operators** submitted by **Mr. Lalit Mohan** to the Indian Institute of Technology Delhi, for the award of the degree of **Doctor of Philosophy**, is a record of the original bonafide research work carried out by him under my supervision and guidance. The thesis has reached the standards fulfilling the requirements of the regulations relating to the degree.

The results contained in this thesis have not been submitted in part or full to any other university or institute for the award of any degree or diploma.

Prof. Aparajita Dasgupta
Associate Professor
Department of Mathematics
Indian Institute of Technology Delhi
New Delhi 110016

Acknowledgements

I express my profound gratitude to people who have supported and guided me throughout my journey and made this thesis possible.
I would like to begin by expressing my sincerest gratitude to my supervisor, Prof. Aparajita Dasgupta, for her constant and unwavering support and guidance. Her invaluable insights have helped me significantly in shaping and refining this thesis. I am deeply grateful to her for encouraging and inspiring me during difficult times. Her discerning observations and insights have always given me fresh insights into my topic. Her mentoring has been of paramount significance in grooming me as a researcher. I am thankful to IIT Delhi authorities for providing me the necessary facilities for the smooth completion of my Ph.D.
I would like to give special thanks to my Student Research Committee members: Prof. N. Shravan Kumar, Prof. Debdip Ganguly, Prof. Vishal K Vaibhav and Prof. Dhiman Mallick for their valuable time and suggestions. A special thanks to Prof. Aparna Mehra, Head of the Department, for her support and affection. I express my gratitude to all the faculty members and staff of the Department of Mathematics, IIT Delhi, for their support.
I would also like to acknowledge the assistance and guidance of Dr. Sanjay Kumar, my graduation professor, who helped me lay foundation in Basic Mathematical Analysis.
I wish to express my sincere appreciation to my distinguished seniors, Dr. Shyam Swarup Mondal, Dr. Vishvesh Kumar, Navnit Sir, Abhilash Bhaiya, Vaibhav Sir, Priyamvada mam, Soniya mam, and Ritika Didi, for their crucial role in shaping my thesis. My constant support throughout IITD journey, Kanupriya - A big thanks to you for being my supporter, motivator and stress buster throughout this journey.
I would like to extend my gratitude to some lovely people I met during my Ph.D. who

made this journey fun and worthwhile. I wish to thank my friends Naveen, Diksha, Ridip, Shweta and my lovely juniors Arvish, Anuj and Prerna for their friendly assistance. I also deeply appreciate the efforts of my dear friends Nitin, Vikas, Sachin, Pankaj, Manish, Sunny, Sanju and Anuj for their constant motivation during difficult times.
Above all, I would like to thank my parents, Manju Devi and Prati Pal Yadav, for their love, blessings, support, encouragement, sacrifice, and unwavering belief in me. Without them, I would not have been to able to complete this journey. Thank you for always being there for me. I also acknowledge my sister Bharti Yadav and Brother-in-law Ajay Yadav for unconditional love and support.
At last, I extend my humble regards to the Almighty who has showered countless blessings upon me and provided me with ample opportunities.

New Delhi *Lalit Mohan*

Abstract

In this thesis, we investigate the M-elliptic pseudo-differential operators and Fourier integral operators. M-elliptic pseudo-differential operators extend the concept of elliptic operators to more general contexts in which the classical concept of ellipticity may be inadequate or unsuitable. They offer a framework to study and solve quasi-elliptic equations in more complex or generalized contexts. M-ellipticity is frequently relevant in the examination of partial differential equations that do not satisfy classical ellipticity in the investigation of boundary value problems on general manifolds.

Fourier Integral Operators (FIOs) are a type of linear operator that extends the concept of differential operators by integrating integral transforms. They are important in the study of partial differential equations (PDEs), as well as harmonic and microlocal analysis. Fourier Integral Operators are very useful for addressing oscillatory integral problems and serve as a link between diverse branches of mathematics and physics.

As an introduction, Chapter 1 gives background information and the state of the study, which will be explored in subsequent chapters. We also provide an outline of the thesis's structure and highlight our key contributions. In Chapter 2, we examine the M-ellipticity of Fredholm pseudo-differential operators linked to weighted symbols on $L^p(\mathbb{R}^n)$, with $1 < p < \infty$. We additionally prove Gårding's inequality for M-elliptic pseudo-differential operators and for the hybrid class of pseudo-differential operators, namely SG M-elliptic operators. Next, we show a version of Gohberg's lemma for pseudo-differential operators with a weighted SG M-symbol. By using Gohberg's lemma, we establish a condition that is both necessary and sufficient for SG pseudo-differential operators to be compact when mapping from $L^2(\mathbb{R}^n)$ to $L^2(\mathbb{R}^n)$ with symbols belong to the class $M^{0,0}_{\rho,\Lambda}$. As an application,

we demonstrate the existence and uniqueness of initial value problems for parabolic equations. In Chapter 3, we explore the elements of symbolic calculus for pseudo-differential operators linked to the weighted symbol class $M^{m}_{\rho,\Lambda}(\mathbb{T}\times\mathbb{Z})$. This involves developing formulas for asymptotic sums, composition, adjoint, and transpose. We additionally establish the parametrix for M-elliptic pseudo-differential operators on $\mathbb{T}$. We also present a version of Gohberg's lemma for pseudo-differential operators in the weighted symbol class $M^{0}_{\rho,\Lambda}(\mathbb{T}\times\mathbb{Z})$. As a result, we give a necessary and sufficient condition to guarantee the compactness of the related pseudo-differential operator on the space $L^2(\mathbb{T})$. Finally, we show Gårding's and Sharp Gårding's inequality for M-elliptic discrete and periodic pseudo-differential operators, respectively. In addition, we apply these inequalities to find strong solutions to the pseudo-differential equation $T_\sigma u = f$ in the Hilbert space $L^2(\mathbb{T})$. In Chapter 4, we investigate M-elliptic pseudo-differential operators in the framework of non-harmonic analysis of boundary value problems on a manifold Ω with boundary $\partial\Omega$. We specifically analyze a weighted $\mathfrak{L}$-symbol class, represented as $M^{m}_{\rho,0,\Lambda}$, where $m \in \mathbb{R}$. We construct formulas for the composition, adjoint, transpose, and parametrix. Furthermore, we analyze the minimal and maximal expansions for M-elliptic pseudo-differential operators and prove their equivalence when the symbol $\sigma \in M^{m}_{\rho,0,\Lambda}$ is M-elliptic. We then provide a condition necessary and sufficient to identify if the pseudo-differential operators T_σ, whose symbols belong to the $\mathfrak{L}$-symbol class $M^{0}_{\rho,0,\Lambda}$ are compact operators in $L^2(\Omega)$ or Riesz operators in $L^p(\Omega)$. In the context of non-harmonic setting, we finally derive Gårding's inequality for pseudo-differential operators connected to symbols from the class $M^{0}_{\rho,0,\Lambda}$. In Chapter 5, we examine the wave equation for the Schrödinger operator on $\mathbb{R}^n$, represented as $\mathcal{H}_0 := -\Delta + V$, where Δ is the conventional Laplacian and V is a multiplication operator. Following the work of Colombini, De Giorgi, and Spagnolo, we establish the well-posedness of the Cauchy problem with regular coefficients in the corresponding Sobolev spaces. Additionally, we demonstrate that when the propagation speed is Hölder continuous or possesses a higher degree of regularity, the problem is well-posed in Gevrey spaces. Moreover, we demonstrate that it is very weakly well-posed when the coefficients possess a distributional singularity. In Chapter 6, we investigate the behavior of multilinear Fourier integral operators in weighted modulation spaces. We use Gabor frame theory to investigate the boundedness of multilinear

Fourier integral operators on weighted modulation spaces. Furthermore, we examine at the periodic multilinear Fourier integral operator. Finally, we investigate the continuity of bilinear pseudo-differential operators on modulation spaces for specific symbol classes, particularly the **SG** class.

सार

इस थीसिस में, हम M-अण्डाकार छद्म-अंतर ऑपरेटरों और फूरियर इंटीग्रल ऑपरेटरों की जांच करते हैं। M-अण्डाकार छद्म-विभेदक ऑपरेटर अण्डाकार ऑपरेटरों की अवधारणा को अधिक सामान्य संदर्भों तक विस्तारित करते हैं जिसमें अण्डाकारता की शास्त्रीय अवधारणा अपर्याप्त या अनुपयुक्त हो सकती है। वे अधिक जटिल या सामान्यीकृत संदर्भों में अर्ध-अण्डाकार समीकरणों का अध्ययन और समाधान करने के लिए एक रूपरेखा प्रदान करते हैं। M-अण्डाकारता आंशिक अंतर समीकरणों की जांच में अक्सर प्रासंगिक होती है जो सामान्य मैनिफोल्ड पर सीमा मूल्य समस्याओं की जांच में शास्त्रीय अण्डाकारता को संतुष्ट नहीं करती है।

फूरियर इंटीग्रल ऑपरेटर्स (एफआईओ) एक प्रकार के लीनियर ऑपरेटर हैं जो इंटीग्रल ट्रांसफॉर्म को एकीकृत करके डिफरेंशियल ऑपरेटर्स की अवधारणा का विस्तार करते हैं। वे आंशिक अंतर समीकरणों (पीडीई) के अध्ययन के साथ-साथ हार्मोनिक और माइक्रोलोकल विश्लेषण में महत्वपूर्ण हैं। फूरियर इंटीग्रल ऑपरेटर्स ऑसिलेटरी इंटीग्रल समस्याओं को संबोधित करने के लिए बहुत उपयोगी हैं और गणित और भौतिकी की विभिन्न शाखाओं के बीच एक कड़ी के रूप में काम करते हैं।

एक परिचय के रूप में, अध्याय:1 पृष्ठभूमि की जानकारी और अध्ययन की स्थिति देता है, जिसे बाद के अध्यायों में खोजा जाएगा। हम थीसिस की संरचना की रूपरेखा भी प्रदान करते हैं और हमारे प्रमुख योगदानों पर प्रकाश डालते हैं। अध्याय:2 में, हम L^p(R^n) पर भारित प्रतीकों से जुड़े फ्रेडहोम छद्म-अंतर ऑपरेटरों की M-अण्डाकारता की जांच करते हैं, $1 < p <∞$. हम अतिरिक्त रूप से M-अण्डाकार छद्म-अंतर ऑपरेटरों के लिए और छद्म-अंतर ऑपरेटरों के संकर वर्ग, अर्थात् SG M-अण्डाकार ऑपरेटरों के लिए G\r{a}rding की असमानता को साबित करते हैं। इसके बाद, हम भारित SG M-प्रतीक के साथ छद्म-विभेदक ऑपरेटरों के लिए गोहबर्ग की लेम्मा का एक संस्करण दिखाते हैं। गोहबर्ग के लेम्मा का उपयोग करके, हम एक ऐसी स्थिति स्थापित करते हैं जो $L^2(R^n) से $L^2(R^n) तक मैप करते समय एसजी छद्म-विभेदक ऑपरेटरों के कॉम्पैक्ट होने के लिए आवश्यक और पर्याप्त दोनों है। R^n प्रतीकों के साथ वर्ग $M_{\rho,\Lambda}^{0,0}$ से संबंधित

है। एक अनुप्रयोग के रूप में, हम परवलयिक समीकरणों के लिए प्रारंभिक मूल्य समस्याओं के अस्तित्व और विशिष्टता को प्रदर्शित करते हैं। अध्याय:3 में, हम भारित प्रतीक वर्ग $M_{\rho, \Lambda}^m(T\times Z) से जुड़े छद्म-अंतर ऑपरेटरों के लिए प्रतीकात्मक कैलकुलस के तत्वों का पता लगाते हैं। इसमें एसिम्प्टोटिक योग, संरचना, जोड़ और स्थानान्तरण के लिए सूत्र विकसित करना शामिल है। हम अतिरिक्त रूप से T पर M-अण्डाकार छद्म-अंतर ऑपरेटरों के लिए पैरामीट्रिक्स स्थापित करते हैं।हम भारित प्रतीक वर्ग $M_{\rho, \Lambda}^0(T\times Z)$ में छद्म-विभेदक ऑपरेटरों के लिए गोहबर्ग के लेम्मा का एक संस्करण भी प्रस्तुत करते हैं। परिणामस्वरूप, हम $L^2(T)$ स्थान पर संबंधित छद्म-विभेदक ऑपरेटर की कॉम्पैक्टनेस की गारंटी के लिए एक आवश्यक और पर्याप्त शर्त देते हैं। अंत में, हम क्रमशः M-अण्डाकार असतत और आवधिक छद्म-अंतर ऑपरेटरों के लिए G\r{a}rding और तीव्र G\r{a}rding की असमानता दिखाते हैं। इसके अलावा, हम हिल्बर्ट स्पेस $L^{2}(T).$ में छद्म-अंतर समीकरण $T_{\sigma} u=f$ के मजबूत समाधान खोजने के लिए इन असमानताओं को लागू करते हैं। अध्याय:4 में, हम सीमा $\आंशिक \Omega$ के साथ कई गुना Ω पर सीमा मूल्य समस्याओं के गैर-हार्मोनिक विश्लेषण के ढांचे में M-अण्डाकार छद्म-अंतर ऑपरेटरों की जांच करते हैं। हम विशेष रूप से एक भारित L-प्रतीक वर्ग का विश्लेषण करते हैं, जिसे $M_{\rho, 0, \Lambda}^{m}$ के रूप में दर्शाया जाता है, जहां $m \in \mathbb{R}$। हम रचना, जोड़, स्थानान्तरण और पैरामीट्रिक्स के लिए सूत्र बनाते हैं। इसके अलावा, हम M-अण्डाकार छद्म-अंतर ऑपरेटरों के लिए न्यूनतम और अधिकतम विस्तार का विश्लेषण करते हैं और जब प्रतीक $\sigma\in M_{\rho, 0, \Lambda}^{m}$ M होता है तो उनकी तुल्यता साबित करते हैं। -अण्डाकार. फिर हम यह पहचानने के लिए आवश्यक और पर्याप्त शर्त प्रदान करते हैं कि क्या छद्म-विभेदक ऑपरेटर T_{σ} हैं, जिनके प्रतीक $\mathfrak{L}$-प्रतीक वर्ग $M^{0}_{\rho, 0,\Lambda} से संबंधित हैं। $L^{2}(\Omega)$ में कॉम्पैक्ट ऑपरेटर हैं या $L^{p}(\Omega) में Riesz ऑपरेटर हैं। गैर-हार्मोनिक सेटिंग के संदर्भ में, हम अंततः वर्ग $M_{\rho, 0,\Lambda}^{0}$ के प्रतीकों से जुड़े छद्म-अंतर ऑपरेटरों के लिए G\r{a}rding की असमानता प्राप्त करते हैं। अध्याय:5 में, हम R^{n} पर श्रोडिंगर ऑपरेटर के लिए तरंग समीकरण की जांच करते हैं, जिसे $H_{0}:=-\Delta+V$ के रूप में दर्शाया जाता है।, जहां Δ पारंपरिक लाप्लासियन है और V एक गुणन ऑपरेटर है। कोलंबिनी, डी जियोर्गी और

स्पैग्नोलो के काम के बाद, हम संबंधित सोबोलेव स्थानों में नियमित गुणांक के साथ कॉची समस्या की अच्छी तरह से स्थापितता स्थापित करते हैं। इसके अतिरिक्त, हम यह प्रदर्शित करते हैं कि जब प्रसार की गति से अधिक निरंतर होती है या उच्च स्तर की नियमितता रखती है, तो समस्या को गेव्रे स्थानों में अच्छी तरह से प्रस्तुत किया जाता है। इसके अलावा, हम प्रदर्शित करते हैं कि यह बहुत कमजोर रूप से अच्छी तरह से प्रस्तुत किया जाता है जब गुणांकों में एक वितरणात्मक विलक्षणता होती है। अध्याय:6 में, हम भारित मॉड्यूलेशन स्थानों में बहुरेखीय फूरियर इंटीग्रल ऑपरेटरों के व्यवहार की जांच करते हैं। हम भारित मॉड्यूलेशन स्थानों पर बहुरेखीय फूरियर इंटीग्रल ऑपरेटरों की सीमा की जांच करने के लिए गैबोर फ्रेम सिद्धांत का उपयोग करते हैं। इसके अलावा, हम आवधिक बहुरेखीय फूरियर इंटीग्रल ऑपरेटर की जांच करते हैं। अंत में, हम विशिष्ट प्रतीक वर्गों, विशेष रूप से \$SG\$ वर्ग के लिए मॉड्यूलेशन स्थानों पर द्विरेखीय छद्म-विभेदक ऑपरेटरों की निरंतरता की जांच करते हैं।

Contents

List of Symbols

Symbol	**Meaning**
$\mathbb{R}$	Set of Real numbers
$\mathbb{Z}$	Set of integers
$\mathbb{T}$	one-dimensional torus
$\mathbb{R}^n$	n-dimensional Cartesian Product of $\mathbb{R}$
$\mathbb{Z}^n$	n-dimensional lattice
$\mathbb{T}^n$	n-dimensional torus
$\in$	Belongs to
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	Schwartz space of rapidly decreasing functions on $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$	Schwartz space of rapidly decreasing functions on $\mathbb{Z}^n$
Ω	Smooth n-dimensional manifold
$\partial\Omega$	Boundary of Ω
$\mathcal{I}$	Subset of $\mathbb{Z}^k$ for some $k \geq 1$

$\mathfrak{L}$	Differential operator of order m with smooth bounded coefficients in Ω
Φ	Real-valued phase function