

**NUMERICAL METHODS AND DATA-DRIVEN
APPROACH FOR STOCHASTIC
INTEGRO-DIFFERENTIAL/DIFFERENTIAL EQUATIONS
CONTAINING NON-LOCAL OPERATORS**

ABHISHEK KUMAR SINGH



**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI
AUGUST 2023**

© Indian Institute of Technology Delhi (IITD), New Delhi, 2023

**NUMERICAL METHODS AND DATA-DRIVEN APPROACH
FOR STOCHASTIC
INTEGRO-DIFFERENTIAL/DIFFERENTIAL EQUATIONS
CONTAINING NON-LOCAL OPERATORS**

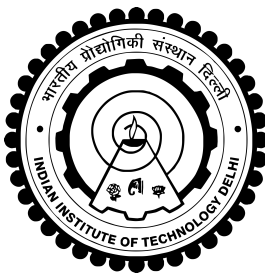
by

ABHISHEK KUMAR SINGH

Department of Mathematics

Submitted

*in fulfillment of the requirements of the degree of Doctor of Philosophy
to the*



**Indian Institute of Technology Delhi
August 2023**

**To
My Mother**

Certificate

This is to certify that the thesis entitled **Numerical Methods and Data-Driven Approach for Stochastic Integro-Differential/Differential Equations Containing Non-Local Operators** submitted by **Mr. Abhishek Kumar Singh** to the **Indian Institute of Technology Delhi**, for the award of the degree of **Doctor of Philosophy**, is a record of the original bonafide research work carried out by him under my supervision and guidance. The thesis has reached the standards fulfilling the requirements of the regulations relating to the degree. The results contained in this thesis have not been submitted in part or full to any other university or institute for the award of any degree or diploma.

New Delhi
August 2023

Prof. Mani Mehra
Department of Mathematics
Indian Institute of Technology Delhi

Acknowledgments

With deep sense of gratitude, I would like to thank the people without whom this thesis would not have been possible.

First and foremost, I would like to extend my sincere gratitude to my research supervisor, Prof. Mani Mehra, whose expertise was invaluable in formulating the research problems and methodology. Her insightful feedback pushed me to sharpen my thinking and brought my work to a higher level. With deep respect, I acknowledge her academic and emotional support through the rough road to finish this thesis. The independence, she granted me helped me to grow as an independent researcher. I want to thank her for providing me the best support during these years, that is friendship. Thus, we could discuss freely on many occasions regarding many aspects of life that immensely helped me to lead a healthy and better life. I am also thankful to her for allowing me to be a part of national and international conferences/workshops, where I learned many things. Thank you for your vital support and belief in my research abilities.

I owe a special thanks to Dr. Vivek Kumar Aggarwal, Delhi Technological University, Delhi, for his valuable insights and discussions. I am grateful for the support I received from him.

Beside my supervisor, I want to convey my sincere thanks to the rest of my SRC members Prof. V. V. K. Srinivas Kumar, Prof. Punit Sharma, Prof. Vivek Kumar, Centre for Rural Development and Technology (CRDT) for their cooperation and useful comments during the progress of my research work. I owe my special thanks to Prof. Aparna Mehra, Head of Department, Prof. K. Sreenadh, Prof. S. Dharmaraja, former Head's of Department for their support throughout my research work. I also convey my gratitude to all the faculty members and staff of the Department of Mathematics, IIT Delhi, who have offered their help at different stages during my research work. A special thanks to my

seniors Dr. Kuldip Singh Patel and Dr. Vaibhav Mehandiratta for providing me academic assistance and personal support whenever I required it.

I take this opportunity to convey my gratitude to my family, especially my parents, my sister Rinki, my brother Pyare, my Bade Papa Adv. Ajay Kumar Singh and my uncle Dr. Vineet Kumar Singh. I am grateful to them for encouraging me to do hard and good work in my life. Also, I would like to convey my gratitude to my school teachers, Anand Swaroop Pandey, Awdhesh Sir, and Dr. Urmilesh Singh, and to my M.Tech. supervisor, Prof. S. Roy (IIT Madras). I thank my wife, Neha, for her love and constant support over the past few months. But most of all, thank you for being my best friend. I owe you everything.

Also, I would like to use this platform to thank the wonderful people I met during my Ph.D. and who made this entire learning experience in IIT Delhi productive and fun. I want to thank my friends Dr. Abhay, Dr. Anubha, Dr. Anuj, Dr. Dileep, Dr. Puneet, Dr. Dhiraj, Dr. Nitin, Dr. Kshitij and my lovely juniors Ankita, Jaya, Shweta and Yash for their friendly assistance. I would also like to extend my appreciation to my dear friends Abhishek Rai and Dr. Prerna (post-doc fellow at the Princeton University) for their constant motivation during hard times.

I acknowledge the University Grants Commission (UGC), India, for financial support and the Indian Institute of Technology Delhi administration for the smooth management of the official processes during these years.

Above all, I thank the Almighty God for benevolent blessings, which strengthened me throughout and enabled me to accomplish my work.

*New Delhi
August 2023*

Abhishek Kumar Singh

Abstract

Integro-differential equations containing non-local operators (fractional operators and integrals) can be characterized as an extended form of the classical integro-differential equations. Similarly, differential equations containing non-local operators (fractional operators) can be characterized as an extended form of classical differential equations. The word stochastic comes because, sometimes, many random perturbations come from many sources; we cannot ignore them and must incorporate them into the integro-differential and differential equations containing non-local operators. Incorporating these terms produces stochastic integro-differential equations and stochastic differential equations containing non-local operators. There are two types of problems, forward and inverse, regarding stochastic integro-differential equations and differential equations containing non-local operators discussed in this thesis. In the forward problems, due to the complex nature of stochastic integro-differential/differential equations containing non-local operators, it is only sometimes possible to obtain the analytical solutions of these equations. Therefore, accurate and efficient numerical methods and data-driven approach are required to solve them. On the other hand, for inverse problems, it is not always possible to obtain these equations with the help of available information. Therefore, efficient methods are required to solve inverse problems using the available information (data and some physics).

In this thesis, we are concerned with the stochastic fractional integro-differential equation (Caputo fractional derivative, Volterra integral, and Ito integral as non-local operators), the variable order stochastic fractional integro-differential equation (variable order Caputo fractional derivative, Volterra integral, and Ito integral as non-local operators), the stochastic space fractional diffusion equation (Riesz fractional derivative as a non-local operator), and linear and non-linear time fractional differential equations (Caputo fractional derivative as a non-local operator) for forward problems. We considered linear and non-linear time fractional differential equations and stochastic fractional integro-differential equation for inverse problems.

The high-order polynomial approximation methods are numerically unstable. To overcome this problem, we develop a wavelet collocation method to solve stochastic fractional integro-differential equation based on orthogonal polynomials (Legendre polynomials) and operational matrices. Finding the operational matrices of fractional derivatives and integrals for the Legendre wavelet without using other functions is difficult. Therefore, the block pulse functions are used to find the Legendre wavelet's operational matrices. Moreover, we discuss the different types of approximation errors present in the numerical method and provide some examples to demonstrate the applicability of the numerical method. Results are compared with the existing literature for the stochastic fractional integro-differential equation. We introduce one of the approximation errors using the block pulse function for finding the operational matrices. Therefore, the operational matrices have been derived without introducing approximation error for the Legendre wavelet at a later stage. Moreover, the Legendre wavelet collocation method is proposed to solve the stochastic fractional integro-differential equation. The convergence analysis of the proposed numerical method is discussed, and illustrative examples are included to demonstrate the applicability of the proposed method. We have also compared the numerical results with some existing numerical methods to show the superiority of the proposed method.

We also encounter fractional orthogonal polynomials in the literature, which have one additional degree of freedom compared to the classical orthogonal polynomials. Moreover, fractional derivatives and integral of fractional orthogonal polynomials are again fractional orthogonal polynomials. Because of the abovementioned advantage, one may get better accuracy with the low-degree approximation with the fractional orthogonal polynomials. Thus, we discuss how to generate the fractional orthogonal polynomials with respect to general weight functions and develop a spectral collocation method for the stochastic fractional integro-differential equation based on one of the fractional orthogonal polynomials, which are the Müntz-Legendre polynomials (orthogonal with respect to unit weight function) with the help of operational matrices. However, due to the additional parameter, there are uncountable choices of approximation space for fixed degrees or orders of the Müntz-Legendre polynomials. Therefore, an algorithm is proposed with the help of differential evolution to find the parameter for which we get the best approximation results. The convergence analysis of the proposed numerical method is discussed, and examples are provided to demonstrate the applicability of the numerical method. Further, using a modified least squares method, we apply fractional orthogonal polynomials to some test examples for the comparative study over the Müntz-Legendre polynomials.

Various real world phenomena cannot be described by integro-differential equations containing constant order fractional derivatives. Therefore, a variable order stochastic fractional integro-differential equation is proposed. Using the Banach contraction principle, we prove the existence and

uniqueness of the solution to the considered problem. Moreover, due to the unavailability of the exact solution to the considered problem in many cases, we also developed a spectral collocation method based on the Müntz-Legendre polynomials. Further, the numerical method's accuracy and efficiency are demonstrated through some test experiments. Moreover, the advantage of the variable order model over the constant order model is shown through a real world example of mathematical finance.

We have considered differential equations containing non-local operators with respect to spatial variables (stochastic space fractional diffusion equation). Finite difference schemes are one of the oldest and most well-established techniques for the numerical solution of partial differential equations, and the scarcity of work regarding numerical methods for the considered problem in the literature. Therefore, we develop a stochastic version of finite difference methods (explicit and implicit) for the considered problem. Due to non-local operators, proving the consistency, stability, and convergence of the developed stochastic version of finite difference methods is very challenging. The consistency, stability, and convergence of the developed numerical methods are proved in the mean square sense. The accuracy and efficiency of the proposed numerical methods are investigated through test examples.

Finally, we develop a data-driven approach for forward problems (solving differential equations) containing non-local operators. For the forward problems, the time fractional differential equations (time fractional Burgers and diffusion equations) and stochastic fractional integro-differential equations are considered. A non-local physics informed neural network is proposed for solving such problems, which is a deep learning framework. Test examples are used to investigate the accuracy and efficiency of the proposed method. Moreover, we develop a data-driven approach for inverse problems (learning differential equations) containing non-local operators. The methodologies are classified into two parts for the inverse problems based on the available information. Firstly, the data-driven approach based on sparse regression is proposed for the differential equations where the form of the right-hand side of the differential equation (containing all the spatial derivative terms) is unknown. Secondly, for the differential equations where the parametrized form of the differential equation is unknown, we propose a non-local physics informed neural network for data-driven discovery of differential equations containing non-local operators. Finally, the efficiency of both methodologies is demonstrated through test examples.

सार

गैर-स्थानीय ऑपरेटरों (फ्रैक्शनल ऑपरेटर्स और इंटीग्रल्स) वाले इंटीग्रो-डिफरेंशियल समीकरणों को क्लासिकल इंटीग्रो-डिफरेंशियल समीकरणों के विस्तारित रूप में वर्णित किया जा सकता है। इसी प्रकार, गैर-स्थानीय ऑपरेटरों (आंशिक ऑपरेटरों) वाले अंतर समीकरणों को क्लासिकल अंतर समीकरणों के विस्तारित रूप में वर्णित किया जा सकता है। स्टोकेस्टिक शब्द इसलिए आता है क्योंकि, कभी-कभी, कई यादृच्छिक गड़बड़ी कई स्रोतों से आती हैं; हम उन्हें नजरअंदाज नहीं कर सकते हैं और उन्हें गैर-स्थानीय ऑपरेटरों वाले पूर्णांक-अंतर और अंतर समीकरणों में शामिल करना चाहिए। इन शब्दों को शामिल करने से गैर-स्थानीय ऑपरेटरों वाले स्टोकेस्टिक इंटीग्रो-डिफरेंशियल समीकरण और स्टोकेस्टिक डिफरेंशियल समीकरण उत्पन्न होते हैं। इस थीसिस में चर्चा की गई गैर-स्थानीय ऑपरेटरों वाले स्टोकेस्टिक इंटीग्रो-डिफरेंशियल समीकरणों और अंतर समीकरणों के संबंध में दो प्रकार की समस्याएं हैं, फारवर्ड और इन्वर्स। फारवर्ड समस्याओं में, गैर-स्थानीय ऑपरेटरों वाले स्टोकेस्टिक इंटीग्रो-डिफरेंशियल/डिफरेंशियल समीकरणों की जटिल प्रकृति के कारण, इन समीकरणों के विश्लेषणात्मक समाधान प्राप्त करना कभी-कभी ही संभव होता है। इसलिए, उन्हें हल करने के लिए सटीक और कुशल संख्यात्मक तरीकों और डेटा-संचालित दृष्टिकोण की आवश्यकता होती है। दूसरी ओर, इन्वर्स समस्याओं के लिए, उपलब्ध जानकारी की सहायता से इन समीकरणों को प्राप्त करना हमेशा संभव नहीं होता है। इसलिए, उपलब्ध जानकारी (डेटा और कुछ भौतिकी) का उपयोग करके इन्वर्स समस्याओं को हल करने के लिए कुशल तरीकों की आवश्यकता होती है।

इस थीसिस में, हम फारवर्ड समस्याओं के लिए स्टोकेस्टिक फ्रैक्शनल इंटीग्रो-डिफरेंशियल समीकरण (कैपुटो फ्रैक्शनल डेरिवेटिव, वोल्टेरा इंटीग्रल, और इटो इंटीग्रल गैर-स्थानीय ऑपरेटरों के रूप में), वेरिएबल ऑर्डर स्टोचैस्टिक फ्रैक्शनल इंटीग्रो-डिफरेंशियल समीकरण (वेरिएबल ऑर्डर कैपुटो फ्रैक्शनल डेरिवेटिव, वोल्टरा इंटीग्रल और इटो इंटीग्रल गैर-स्थानीय ऑपरेटरों के रूप में), स्टोचैस्टिक स्पेस फ्रैक्शनल प्रसार समीकरण (गैर-स्थानीय ऑपरेटर के रूप में रीज़ फ्रैक्शनल डेरिवेटिव), और रैखिक और गैर-रेखीय समय फ्रैक्शनल डिफरेंशियल समीकरण (गैर-स्थानीय ऑपरेटर के रूप में कैपुटो फ्रैक्शनल डेरिवेटिव) पर विचार किया। हमने इन्वर्स समस्याओं के

लिए और गैर-रेखीय समय फ्रैक्शनल डिफरेंशियल समीकरण और स्टोकेस्टिक फ्रैक्शनल इंटीग्रो-डिफरेंशियल समीकरण पर विचार किया।

उच्च-क्रम बहुपद सन्निकटन विधियाँ संख्यात्मक रूप से अस्थिर हैं। इस समस्या को दूर करने के लिए, हम ऑर्थोगोनल पॉलीनोमिअल्स (लीजेंड्रे पॉलीनोमिअल्स) और ऑपरेशनल मैट्रिक्स के आधार पर स्टोकेस्टिक फ्रैक्शनल इंटीग्रो-डिफरेंशियल समीकरण को हल करने के लिए एक वेवलेट कोलोकेशन विधि विकसित करते हैं। अन्य कार्यों का उपयोग किए बिना लीजेंड्रे वेवलेट के लिए फ्रैक्शनल डेरिवेटिव और इंटीग्रल के ऑपरेशनल मैट्रिक्स को ढूँढना मुश्किल है। इसलिए, लीजेंड्रे वेवलेट के ऑपरेशनल मैट्रिक्स को खोजने के लिए ब्लॉक पल्स फलन का उपयोग किया जाता है। इसके अलावा, हम संख्यात्मक विधि में मौजूद विभिन्न प्रकार की सन्निकटन त्रुटियों पर चर्चा करते हैं और संख्यात्मक विधि की प्रयोज्यता को प्रदर्शित करने के लिए कुछ उदाहरण प्रदान करते हैं। परिणामों की तुलना स्टोकेस्टिक फ्रैक्शनल इंटीग्रो-डिफरेंशियल समीकरण के लिए मौजूदा साहित्य से की जाती है। हम ऑपरेशनल मैट्रिक्स खोजने के लिए ब्लॉक पल्स फलन का उपयोग करके सन्निकटन त्रुटियों में से एक का परिचय देते हैं। इसलिए, बाद के चरण में लीजेंड्रे वेवलेट के लिए सन्निकटन त्रुटि पेश किए बिना ऑपरेशनल मैट्रिक्स प्राप्त किया गया है। इसके अलावा, स्टोकेस्टिक फ्रैक्शनल इंटीग्रो-डिफरेंशियल समीकरण को हल करने के लिए लीजेंड्रे वेवलेट कोलोकेशन विधि प्रस्तावित है। प्रस्तावित संख्यात्मक विधि के अभिसरण विश्लेषण पर चर्चा की गई है, और प्रस्तावित विधि की प्रयोज्यता को प्रदर्शित करने के लिए उदाहरणात्मक उदाहरण शामिल किए गए हैं। हमने प्रस्तावित विधि की श्रेष्ठता दिखाने के लिए संख्यात्मक परिणामों की तुलना कुछ मौजूदा संख्यात्मक विधियों से भी की है।

हम साहित्य में फ्रैक्शनल ऑर्थोगोनल बहुपदों का भी सामना करते हैं, जिनमें क्लासिकल ऑर्थोगोनल बहुपदों की तुलना में स्वतंत्रता की एक अतिरिक्त डिग्री होती है। इसके अलावा, फ्रैक्शनल ऑर्थोगोनल बहुपदों का फ्रैक्शनल डेरिवेटिव और इंटीग्रल फिर से फ्रैक्शनल ऑर्थोगोनल बहुपद हैं। उपर्युक्त लाभ के कारण, फ्रैक्शनल ऑर्थोगोनल बहुपदों के साथ निम्न-डिग्री सन्निकटन के साथ बेहतर सटीकता प्राप्त हो सकती है।

इस प्रकार, हम चर्चा करते हैं कि सामान्य वेट फलन के संबंध में फ्रैक्शनल ऑर्थोगोनल बहुपद कैसे उत्पन्न किया जाए और फ्रैक्शनल ऑर्थोगोनल बहुपदों में से एक के आधार पर स्टोकेस्टिक फ्रैक्शनल इंटीग्रो-डिफरेंशियल समीकरण के लिए ऑपरेशनल मैट्रिसेस की मदद से एक वर्णक्रमीय संयोजन विधि विकसित की जाए, जो मंट्ज़-लीजेंडर बहुपद (ऑर्थोगोनल हैं यूनिट वेट फलन के संबंध में)। हालाँकि, अतिरिक्त पैरामीटर के कारण, मंट्ज़-लीजेंडर बहुपदों की निश्चित डिग्री या ऑर्डर के लिए सन्निकटन स्थान के अनगिनत विकल्प हैं। इसलिए, उस पैरामीटर को खोजने के लिए डिफरेंशियल इवोल्यूशन की सहायता से एक एल्गोरिदम प्रस्तावित किया गया है जिसके लिए हमें सर्वोत्तम सन्निकटन परिणाम मिलते हैं। प्रस्तावित संख्यात्मक विधि के अभिसरण विश्लेषण पर चर्चा की गई है, और संख्यात्मक विधि की प्रयोज्यता को प्रदर्शित करने के लिए उदाहरण प्रदान किए गए हैं। इसके अलावा, संशोधित न्यूनतम वर्ग विधि का उपयोग करते हुए, हम मंट्ज़-लीजेंडर बहुपदों पर तुलनात्मक अध्ययन के लिए कुछ परीक्षण उदाहरणों पर फ्रैक्शनल ऑर्थोगोनल बहुपद लागू करते हैं।

विभिन्न वास्तविक विश्व घटनाओं का वर्णन स्थिर क्रम फ्रैक्शनल डेरिवेटिव वाले इंटीग्रो-डिफरेंशियल समीकरणों द्वारा नहीं किया जा सकता है। इसलिए, एक परिवर्तनीय क्रम स्टोकेस्टिक फ्रैक्शनल इंटीग्रो-डिफरेंशियल समीकरण प्रस्तावित है। बानाच संकुचन सिद्धांत का उपयोग करते हुए, हम विचाराधीन समस्या के समाधान के अस्तित्व और विशिष्टता को साबित करते हैं। इसके अलावा, कई मामलों में विचाराधीन समस्या के सटीक समाधान की अनुपलब्धता के कारण, हमने मंट्ज़-लीजेंडर बहुपदों के आधार पर एक वर्णक्रमीय संयोजन विधि भी विकसित की है। इसके अलावा, संख्यात्मक विधि की सटीकता और दक्षता कुछ परीक्षण प्रयोगों के माध्यम से प्रदर्शित की जाती है। इसके अलावा, स्थिर क्रम मॉडल की तुलना में परिवर्तनीय क्रम मॉडल का लाभ गणितीय वित्त के वास्तविक विश्व उदाहरण के माध्यम से दिखाया गया है।

हमने स्पेस चर (स्टोकेस्टिक स्पेस फ्रैक्शनल डिफ्यूजन समीकरण) के संबंध में गैर-स्थानीय ऑपरेटरों वाले अंतर समीकरणों पर विचार किया है। परिमित अंतर योजनाएं आंशिक अंतर

समीकरणों के संख्यात्मक समाधान के लिए सबसे पुरानी और सबसे अच्छी तरह से स्थापित तकनीकों में से एक हैं, और साहित्य में विचाराधीन समस्या के लिए संख्यात्मक तरीकों के संबंध में काम की कमी है। इसलिए, हम विचाराधीन समस्या के लिए परिमित अंतर विधियों (स्पष्ट और अंतर्निहित) का एक स्टोकेस्टिक संस्करण विकसित करते हैं। गैर-स्थानीय ऑपरेटरों के कारण, परिमित अंतर विधियों के विकसित स्टोकेस्टिक संस्करण की स्थिरता, स्थिरता और अभिसरण साबित करना बहुत चुनौतीपूर्ण है। विकसित संख्यात्मक विधियों की स्थिरता, स्थिरता और अभिसरण माध्यम वर्ग अर्थ में सिद्ध होते हैं। प्रस्तावित संख्यात्मक तरीकों की सटीकता और दक्षता की जांच परीक्षण उदाहरणों के माध्यम से की जाती है।

अंत में, हम गैर-स्थानीय ऑपरेटरों वाली फारवर्ड समस्याओं (अंतर समीकरणों को हल करने) के लिए एक डेटा-संचालित दृष्टिकोण विकसित करते हैं। फारवर्ड समस्याओं के लिए, समय भिन्नात्मक अंतर समीकरण (समय भिन्नात्मक बर्गर और प्रसार समीकरण) और स्टोकेस्टिक भिन्नात्मक पूर्णांक-अंतर समीकरणों पर विचार किया जाता है। ऐसी समस्याओं को हल करने के लिए एक गैर-स्थानीय भौतिकी-सूचित तंत्रिका नेटवर्क प्रस्तावित है, जो एक गहन शिक्षण ढांचा है। प्रस्तावित विधि की सटीकता और दक्षता की जांच के लिए परीक्षण उदाहरणों का उपयोग किया जाता है। इसके अलावा, हम गैर-स्थानीय ऑपरेटरों वाले इन्वर्स समस्याओं (सीखने के अंतर समीकरण) के लिए एक डेटा-संचालित दृष्टिकोण विकसित करते हैं। उपलब्ध जानकारी के आधार पर व्युत्क्रम समस्याओं के लिए कार्यप्रणाली को दो भागों में वर्गीकृत किया गया है। सबसे पहले, विरल प्रतिगमन पर आधारित डेटा-संचालित दृष्टिकोण अंतर समीकरणों के लिए प्रस्तावित है जहां अंतर समीकरण (सभी स्थानिक व्युत्पन्न शर्तों वाले) के दाहिने भाग का रूप अज्ञात है। दूसरे, उन विभेदक समीकरणों के लिए जहां विभेदक समीकरण का पैरामीट्रिज्ड रूप अज्ञात है, हम गैर-स्थानीय ऑपरेटरों वाले विभेदक समीकरणों की डेटा-संचालित खोज के लिए एक गैर-स्थानीय भौतिकी सूचित तंत्रिका नेटवर्क का प्रस्ताव करते हैं। अंत में, दोनों पद्धतियों की दक्षता परीक्षण उदाहरणों के माध्यम से प्रदर्शित की जाती है।

Contents

Certificate	i
Acknowledgments	iii
Abstract	v
List of Figures	xvii
List of Tables	xix
List of Symbols	xxiii
List of Abbreviations	xxv
List of Numerical Parameter	xxvii
1 Introduction	1
1.1 Fractional calculus	1
1.2 Stochastic calculus	7
1.3 Stochastic fractional differential/integro-differential/partial-differential equations . .	11
1.4 Numerical methods	12
1.4.1 Spectral collocation method	12
1.4.2 Wavelet collocation method	14
1.4.3 Operational matrices	14
1.5 Data-driven solution of differential equations (forward problems)	16
1.6 Data-driven discovery of differential equations (inverse problems)	17
1.7 Organization of the thesis	18

2	Legendre wavelet collocation method for stochastic fractional integro-differential equation	21
2.1	Preliminaries	23
2.1.1	Multi-resolution analysis (MRA)	24
2.1.2	Function approximation	27
2.2	Construction of Legendre wavelet collocation method with the help of block pulse functions	28
2.2.1	Legendre wavelet operational matrix of fractional order integration	28
2.2.2	Deterministic integration operational matrix	29
2.2.3	Stochastic integration operational matrix	30
2.2.4	Description of numerical method	31
2.2.5	Convergence analysis	33
2.2.6	Numerical experiments	38
2.3	Construction of Legendre wavelet collocation method without the help of block pulse functions	44
2.3.1	Transformation matrix of the Legendre wavelet to the piecewise polynomials	45
2.3.2	Description of numerical method	45
2.3.3	Operational matrix of fractional order integration of piecewise polynomials and Legendre wavelet	47
2.3.4	Deterministic integration operational matrix for Legendre wavelet	51
2.3.5	Stochastic integration operational matrix for Legendre wavelet	52
2.3.6	Derivation of the other matrices	54
2.3.7	Convergence analysis	55
2.3.8	Numerical experiments	60
2.4	Applications	62

3	An algorithm to estimate parameter in Müntz-Legendre polynomials, numerical solution of stochastic fractional integro-differential equation and applications	65
3.1	Preliminaries	66
3.1.1	Jacobi polynomials	67
3.1.2	Müntz-Legendre polynomials	68
3.1.3	Differential evolution method	71
3.1.4	Function approximation	73
3.2	Construction of a collocation method based on Müntz-Legendre polynomials	74
3.2.1	Deterministic operational matrix of integration	74
3.2.2	Stochastic operational matrix of integration	75
3.2.3	Operational matrix of fractional integration	76
3.2.4	Description of numerical method	76
3.2.5	Algorithm	78
3.2.6	Convergence analysis	80
3.2.7	Numerical experiments	85
3.3	Application of general fractional orthogonal polynomials	89
3.3.1	Modified least squares method	89
3.3.2	Numerical experiments	91
4	Numerical solution of variable order stochastic fractional integro-differential equation with a collocation method based on Müntz-Legendre polynomials	93
4.1	Existence and uniqueness of VSFIDE	95
4.2	Operational matrix of variable order fractional integration	100
4.3	Description of numerical method	101
4.4	Numerical experiments	103
4.5	Applications in the mathematical finance	106

5	Difference methods for stochastic space fractional diffusion equation driven by additive space-time white noise	109
5.1	Preliminaries	111
5.2	Description of numerical methods	120
5.2.1	Explicit stochastic finite difference method (ESFDM)	121
5.2.2	Implicit stochastic finite difference method (ISFDM)	121
5.3	Stability and convergence analysis	122
5.4	Numerical experiments	128
6	Methodologies based on data-driven approach for forward and inverse problems containing non-local operators	135
6.1	Approximation of non-local operators	139
6.2	Data-driven solution of differential equations containing non-local operators (forward problems)	140
6.3	Numerical experiments for forward problems	142
6.4	Data-driven discovery of differential equations containing non-local operators (inverse problems)	147
6.4.1	Methodology for category 1	147
6.4.2	Methodology for category 2	150
6.5	Numerical experiments for inverse problems	152
6.5.1	For category 1	152
6.5.2	For category 2	156
7	Conclusion and future research directions	161
7.1	Conclusion	161
7.2	Future research directions	163
	References	165
	Bio-Data	177

List of Figures

2.1	Approximation error ($\ e\ _{2,\Delta t_i}$) for Example 2.2.1 with $\alpha = 0$, $M = 2$ and different values $\hat{m}$	41
2.2	The trajectory of the approximate solution and exact solution of Example 2.2.2 for $M = 2$, $J = 5$, $\hat{m} = 32$ and $\alpha = 0.5$	42
2.3	The trajectory of the approximate solution and exact solution of Example 2.2.3 along with 95% C.I. for $M = 2$, $J = 5$, $\hat{m} = 32$ and $\alpha = 0$	43
2.4	Histogram plots for $\mathbb{E}(u(0.5))$ with $J = 2$, $M = 5$ and different values of α	63
2.5	Histogram plots for stock price (1 st market) at the end of year by analytic solution (left) and numerical solution (right), respectively.	64
3.1	Differential Evolution Flowchart	73
3.2	Convergence of differential evolution method for Example 3.2.2 with $n = 16$	87
3.3	The trajectory of the approximate solution and exact solution of Example 3.2.4 along with 95% C.I. for $n = 16$, $\alpha = 0.75$ and optimized $\lambda = 0.8645$	88
4.1	Histogram plots for expected value of $u(t)$ at $t = 0.5$ with $n = 10$, $\lambda = 0.7$ and $N_s = 10000$ for the Example 4.4.3.	107

5.1	Mean solution $\mathbb{E}(\hat{u}(x, 1))$ for Example 5.4.1 using ESFDM with $\tau = 1/200$, $\beta = 1.8$ and $\sigma = 1$	129
5.2	Mean values along with the confidence interval range for Example 5.4.1.	131
5.3	Exact and Approximate solution of Example 5.4.1 using ISFDM with different values of σ	132
6.1	Flowchart of NL-PINNs	138
6.2	The framework of NL-PINNs for solving time fractional differential equations.	140
6.3	The trajectory of exact solution and predicted solution for Example 6.3.3 with $\alpha = 0.5$ and fixed neural network architecture (Layer = 4, Neurons = 20).	146
6.4	The framework of NL-PINN for data driven discovery of TFDEs.	151
6.5	Exact and Identified $f(x, t)$ with different level of noise.	154

List of Tables

2.1	Results of Example 2.2.1 for $M = 3$, $\alpha = 0$ and different values of $\hat{m}$	40
2.2	Maximum absolute RE in $u(t)$ corresponding to $\alpha = 0$ with different values of J , M and $\hat{m}$	41
2.3	Results of Example 2.2.2 for different values of $\hat{m}$ and $\alpha = 0.75$	42
2.4	Maximum absolute residual error in $u(t)$ corresponding to $\alpha = 0.5$ with different values of J , M and $\hat{m}$	42
2.5	Mean, standard deviation and 95% C.I. for maximum absolute error in Example 2.2.3 with 1000 sample paths and $\alpha = 0$	44
2.6	Mean, standard deviation and 95% confidence interval for maximum absolute RE in Example 2.2.4 with 1000 sample paths and $\alpha = 0.5$	44
2.7	Maximum absolute error for Example 2.3.1 with $\alpha = 0.75$ and different values of J , M and $\hat{m}$	61
2.8	Results of Example 2.3.1 for different values of $\hat{m}$ and $\alpha = 0.75$	61
2.9	The mean absolute RE for Example 2.3.2 with $J = 2$, $M = 5$, $N = 20$, $N_s = 1000$ and different values of t and α	62
2.10	Results of Example 2.3.2 for different values of t and α	62

2.11	Parameter value μ and σ for multidimensional stock market.	64
3.1	Maximum absolute error in $u(t)$ corresponding to $\alpha = 0$ and $\lambda = 0.95$ with different values of n	85
3.2	Maximum absolute error in $u(t)$ corresponding to $\alpha = 0$ and $n = 10$ with different values of λ	86
3.3	Results of Example 3.2.2 for $\alpha = 0.75$ and $\lambda = 0.75$ with different values of n . . .	86
3.4	Mean absolute error in $u(t)$ at $t = 0.5$ along with optimized λ for Example 3.2.3 corresponding to $\alpha = 0$ with different values of n	87
4.1	Comparison of the maximum absolute error in $u(t)$ corresponding to $\alpha(t) = \frac{t}{2}$ and $\lambda = 0.5$ with different value of n	104
4.2	Results of Example 4.4.2 for $\alpha(t) = 0.75$ and $\lambda = 0.75$ with different values of n . .	105
4.3	Comparison of the absolute error at some selected points with $n = 10$, $\lambda = 0.5$ and different $\alpha(t)$ for Example 4.4.2.	105
4.4	Parameter value μ and σ for multidimensional stock market.	108
4.5	Expected value of stock price at the end of the year with $\lambda = 0.7$, $n = 10$ and $N_s = 10000$.	108
5.1	Results for Example 5.4.1 by the ISFDM with $\tau = 0.01$	130
5.2	Results for Example 5.4.1 by the ISFDM with $h = 0.0156$	130
5.3	Results for Example 5.4.2 by the ISFDM with different values of β and h	133
6.1	The l^2 relative error for different neural network architectures for Example 6.3.1 with $\alpha = 0.5$, $M_f = 2000$, $M_{ini} = 10$ and $M_b = 10$	143
6.2	The l^2 relative error for different data sets for Example 6.3.2 with $\alpha = 0.5$ and fixed neural architecture (Layer = 5, Neuron = 20).	144

6.3	The l^2 relative error for Example 6.3.2 with $\alpha = 0.5$, $M_{ini} = 60$, $M_b = 60$, $M_f = 10000$, and different number of layer with fixed neuron 20.	145
6.4	The l^2 relative error for different values of α for Example 6.3.2 with $M_{ini} = 50$, $M_b = 50$, $M_f = 2000$, and fixed neural architecture (Layer = 5, Neuron = 20).	145
6.5	The l^2 relative error for different neural architecture for Example 6.3.2 with $\alpha = 0.5$, $M_f = 2000$, $M_{ini} = 50$ and $M_b = 50$	145
6.6	The l^2 relative error for different values of N_i for Example 6.3.3 with $M_f = 500$, and fixed neural architecture (Layer = 4, Neuron = 20).	146
6.7	The l^2 relative error for different values of N_i for Example 6.3.4 with $M_f = 1000$, and fixed neural architecture (Layer = 4, Neuron = 20).	146
6.8	The identified terms and α for Example 6.5.1 at different level of noise.	153
6.9	The identified terms and α for Example 6.5.2 at different levels of noise.	155
6.10	The identified terms, CPU time and number of iterations required for convergence in Example 6.5.3 with two cases.	156
6.11	The predicted value of λ_1 and λ_2 for Example 6.5.4 with $M_f = 500$, and fixed neural architecture (Layer = 4, Neuron = 20) and different noise level.	157
6.12	The predicted value of α and λ for Example 6.5.5 with $M_f = 500$, and fixed neural architecture (Layer = 4, Neuron = 20) and different noise level.	158
6.13	The predicted value of λ_1 and λ_2 for Example 6.5.6 with $M_f = 500$, and fixed neural architecture (Layer = 4, Neuron = 20) and different noise level.	159

List of Symbols

Symbol	Meaning
i, j, k	non-negative integers
$\mathbb{N}$	Set of natural numbers
$\mathbb{R}$	Set of real numbers
D	Domain
Ω	Sample space
$\mathcal{F}$	Sigma algebra on Ω
$\mathbb{P}$	Probability measure
$\mathbb{E}$	Mathematical expectation
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Probability space
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$	Filtered probability space
$\mathcal{N}$	Non-linear operator
$AC(D)$	Space of functions that are absolutely continuous on D
$C^M(D)$	Space of M -times continuously differentiable functions
$AC^M(D)$	Space of functions f such that $f \in C^{M-1}(D)$ and $f^{M-1} \in AC(D)$
$L^p(D)$	Lebesgue spaces, $1 \leq p \leq \infty$
$L_w^p(D)$	Weighted Lebesgue spaces, $1 \leq p \leq \infty$
$L^2(\Omega, H_w)$	Space of H_w -valued $\mathcal{F}$ -measurable random variable, where $H_w = L_w^2(D)$
$V_M^J, V_M^{J,2}$	Finite dimensional approximation space
M^λ	Müntz space
$M_{n,\lambda}$	Müntz approximation space

List of Abbreviations

Abbreviations	Meaning
PDE	Partial differential equation
FDE	Fractional differential equation
SDE	Stochastic differential equation
SIDE	Stochastic integro-differential equation
SPDE	Stochastic partial differential equation
SFDE	Stochastic fractional differential equation
SFIDE	Stochastic fractional integro-differential equation
SFPDE	Stochastic fractional partial differential equation
VSFIDE	Variable order stochastic fractional integro-differential equation
MRA	Multi-resolution analysis
RE	Residual error
PINN	Physics informed neural network
NL-PINN	Non-local physics informed neural networks
ESFDM	Explicit stochastic finite difference method
ISFDM	Implicit stochastic finite difference method

List of Numerical Parameter

Parameter	Meaning
J	Dilation parameter
n, M	Degree of polynomials
$\hat{m}$	Number of collocation point
α, β	Fractional order
λ	Müntz parameter
τ	Step size in time direction
h	Step size in space direction
N_s	Number of simulation
σ	Stochastic coefficient
M_f	Number of collocation point in the domain
M_{ini}	Number of training point on the initial condition
M_b	Number of training point on the boundary condition
N_i	Number of auxiliary point