

MODELING, ANALYSIS, AND DIFFERENCE SCHEMES FOR LOADED PARABOLIC EQUATIONS ON METRIC STAR GRAPH

SHWETA KUMARI



DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI
MAY 2026

© INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI (IITD), New Delhi, 2026

MODELING, ANALYSIS, AND DIFFERENCE SCHEMES FOR LOADED PARABOLIC EQUATIONS ON METRIC STAR GRAPH

by

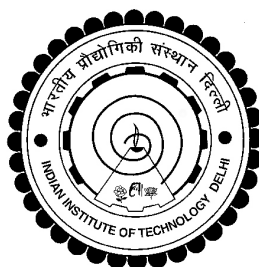
SHWETA KUMARI

Department of Mathematics

Submitted

in fulfillment of the requirements of the degree of Doctor of Philosophy

to the



INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI
May 2026

**Dedicated to
My Parents**

Certificate

This is to certify that the thesis entitled “**Modeling, analysis, and difference schemes for loaded parabolic equations on metric star graph**” submitted by **Ms. Shweta Kumari** to the **Indian Institute of Technology Delhi**, for the award of the degree of **Doctor of Philosophy**, is a record of the original bonafide research work carried out by her under my supervision and guidance. The thesis has reached the standards fulfilling the requirements of the regulations relating to the degree.

The results contained in this thesis have not been submitted in part or in full to any other university or institute for the award of any degree or diploma.

New Delhi
May 2026

Prof. Mani Mehra
Professor
Department of Mathematics
Indian Institute of Technology Delhi

Acknowledgments

Today, as I hold this thesis in my hands and see my name upon it, I truly feel the essence of becoming a Ph.D. graduate. The journey was challenging, often uncertain, and marked by many difficult moments, yet I am grateful to have persevered through them all. Fortunately, I was never alone in this process, and I take this moment to express my sincere gratitude to all those who guided, advised, assisted, supported, and encouraged me throughout this journey, ultimately contributing to the successful completion of this thesis and my Ph.D.

In the very first place, I would like to express my deepest gratitude to my advisor, Prof. Mani Mehra, for her invaluable guidance, constant encouragement, and unwavering support throughout all stages of this thesis. I am especially thankful for her openness to ideas and for consistently motivating me to refine and shape my research interests. This work would not have been possible without her dedicated academic mentorship and the personal care and support she extended to me during my doctoral journey.

I owe my heartfelt thanks to my Ph.D. seniors, Dr. Vaibhav Mehendiratta, Dr. Abhishek Kumar Singh, and Dr. Nitin Kumar, for their helpful academic advice and numerous insightful research discussions. I am deeply grateful for the encouragement, support, and reassurance I received from them at every step.

I am thankful to the IIT Delhi authorities for providing me with the necessary facilities for the smooth completion of my Ph.D. I would like to extend special thanks to my Student Research Committee members: Prof. Kamana Porwal, Prof. V. V. K. Srinivas Kumar, and Prof. S. Pradyumna, for their valuable time and insightful suggestions. I would like to express my gratitude to all the faculty members and staff of the Department of Mathematics at IIT Delhi for their support. I am thankful to Prof. S. Sivananthan and Prof. Minati De for their affection and emotional support.

I would like to use this platform to thank the wonderful people I met during my Ph.D., who made this entire learning experience at IIT Delhi productive and fun. I would like to thank my friends, Dr. Ritika, Dr. Abhilash, Dr. Aastha, Dr. Sushmita, Dr. Anshul, Dr. Lalit, Dr. Bhawna, Dr. Soniya, Dr. Kshitij, Dr. Vidya Sagar, and Dr. Navneet for their constant support and guidance.

I would also like to extend my appreciation to my dear friends, Dr. Himanshu, Dr. Raju, and Dr. Kavin, for their constant motivation and unconditional support during difficult times. I am deeply grateful to my lovely juniors Ritu, Yash, Sarvesh, and Kunika for their friendly assistance. I am also grateful to some lovely junior friends whom I found later in my PhD, who have converted my tough and stressful PhD times to cheerful laughs and fun talks, to Sujoy, Divyaneer, Anshu, Akanksha, Shammi, Nidhi, Anjali, Akanksha Gupta, Soumyashree, Rumki, Sahiba, Chetan, Ratnadip, Sreedharan, Prerna, Ankit, Ayushi, Anuj, and Dr. Soumen.

Above all, I would like to thank my parents, Hari Gopal Prasad and Rekha Devi, for their love, blessings, support, encouragement, sacrifice, and unwavering belief in me. Without them, I would not be the person I am today. Thank you for always being there with me. I also acknowledge my brother Er. Abhishek Kumar for his unconditional love and support.

A very special thanks to my best friend and husband, Dr. Satyam Singh, without whose support this journey would have been plain and tough. Thank you for being by my side throughout my PhD. I am also deeply grateful to my in-laws for their understanding and unwavering support in this journey.

Finally, I would like to thank all those people whose names are not here, but who have played important roles in contributing to my success throughout my life.

May 2026

SHWETA KUMARI

Abstract

Differential equations on metric graphs, introduced by Lumer in the 1980s in the framework of ramification spaces, have various applications in mathematical physics and engineering. Indeed, there are certain phenomena, such as the controlled vibrations of networks of strings (hyperbolic wave equations), water wave propagation in open channel networks (Burgers-type equations), etc., that can be modeled by partial differential equations (PDEs) on metric graphs. On the other hand, fractional calculus has attracted broad interest in recent years, as it can effectively describe phenomena based on power laws. Notably, the fractional diffusion equations are of great relevance in explaining the phenomena of anomalous diffusion, which, in particular, has been observed in various biological systems. Moreover, fractional partial differential equations (FPDEs) on metric graphs can also be used to model important problems such as anomalous heat transport in mesoscopic networks and subdiffusion processes in nanoscale network structures and molecular wires. Various phenomena involving the parabolic differential model, such as heat transfer, diffusion process, etc., are accompanied by residual (nonlocal) processes. In other words, the current state of the process depends on the other (past or future) states, which can be explained by loaded differential equations. Hence, loaded PDEs have significant practical importance, as they model real-world processes governed by nonlocal effects of the state at other times and locations. Therefore, loaded FPDEs on metric graphs may be imperative for representing anomalous diffusion processes in a network of water reservoirs contaminated by pollutants at a finite number of fixed-time instances or fixed pollution source locations.

In this thesis, the modeling, analysis, and numerical schemes of time-fractional loaded parabolic equations on metric star graphs are performed. The work predominantly considers Caputo-type loaded time-fractional diffusion equations (TFDEs) on a metric star graph (a tree-like graph) throughout the thesis. Indeed, a star graph can be seen as a building block for more general metric graphs as any metric graph can be decomposed into a collection of star

graphs. Hence, the loaded time-fractional parabolic problems (TFPEs) are considered on intervals as well as metric star graphs. The existence and uniqueness of these problems are also established. Standard finite difference (SFD) schemes often suffer from limited stability regions, especially when applied in an explicit setup to PDEs. Hence, in the last two chapters, nonstandard finite difference (NSFD) approximations are implemented to demonstrate their efficacy in enhancing the stability regions associated with standard schemes.

The study begins with a Fourier error analysis of discrete approximations for the Caputo fractional derivative based on Lagrange interpolation of various orders. The modified wavenumbers for these approximations over a uniform mesh are derived. Using the modified wavenumbers, the resolution characteristics of the approximations are quantified through the Fourier analysis of differencing errors. Graphical illustrations comparing the original wavenumbers against the modified wavenumbers are presented for each approximation method. A test fractional initial value problem (IVP) is then considered to validate the accuracy and efficiency of different approximation schemes for the Caputo fractional derivative. A numerical algorithm based on Lagrange polynomial interpolation is employed to approximate the Caputo time derivative on a non-uniform mesh. The truncation error rate and the optimal grading constant of the approximation on a graded mesh are obtained using the grading $t_n = T(\frac{n}{N})^r$, where $r \geq 1$ is the mesh grading parameter. Using this approximation, a finite difference scheme for the Caputo-type TFDE is developed on the graded temporal mesh with uniform spatial discretization. The unique solvability of the scheme is established for general r via the matrix method. The unconditional stability of the scheme is derived on a uniform mesh through the discrete energy method. The convergence of the scheme for $r = 1$ is analyzed for non-smooth solutions, and the result is extended for smooth solutions. Finally, the accuracy of the scheme is verified through a study of the numerical error in several illustrative examples.

For Caputo time-fractional parabolic problems on metric graphs, the analysis begins with the time-fractional advection–diffusion equation (TFADE) posed on a metric star graph. A finite difference scheme is formulated to solve the TFADE on this graph, incorporating the corresponding initial, boundary, and transmission conditions at the internal node. The well-known L1 method is employed for the discrete approximation of the Caputo derivative in this and all subsequent problems considered in this thesis. The unconditional stability of the resulting scheme for $\Delta x_i \leq 2$ is established using the discrete energy method. Additionally, the unique solvability of the scheme and its associated error convergence rate are investigated. Numerical experiments are then presented to validate the accuracy and convergence properties of the proposed difference scheme.

Furthermore, the temporally-loaded TFDEs with initial and Dirichlet-type boundary conditions are numerically investigated. A general solution form is first established through the method of eigenfunction expansions, and the well-posedness of the problem is demonstrated by proving the existence and uniqueness of the solution along with certain a priori estimates. A finite difference scheme for the temporally-loaded TFDE is derived, resulting in a temporally-loaded implicit difference scheme. To efficiently handle the loaded term, the superposition property of systems of linear algebraic equations (SLAEs) is utilized, resulting in an appropriate parametric representation of the solution. The difference scheme is shown to be uniquely solvable, stable, and convergent as established via the discrete energy method. Numerical examples on representative test problems confirm the accuracy and efficiency of the derived scheme.

This framework is further extended to the study of non-loaded and temporally-loaded diffusion equations on a metric star graph, motivated by applications to complex network-like physical systems. The existence and uniqueness of the solution for the loaded diffusion equation on the metric graph are established using eigenfunction expansions, accompanied by appropriate a priori estimates. Finite difference schemes for both problems are constructed with transmission conditions at the junction, giving rise to additional difference schemes at the central node. The presence of the loaded term introduces parametric dependencies, which are efficiently addressed using the superposition property of SLAEs to obtain explicit solution representations. The resulting difference schemes for non-loaded and temporally-loaded diffusion problems on star graph are proven to be stable and convergent, unconditionally and under sufficient conditions, respectively. Numerical results are obtained on several test problems to validate the robustness and applicability of numerical schemes.

To represent occurrences with multiple pointwise spatial effects on the overall state, the spatially-loaded Caputo-type TFDE with Dirichlet boundary conditions of non-homogeneous type on an interval and homogeneous type on a metric star graph are studied. The well-posedness of the system on an interval is established using the Galerkin approximation method, and some a priori estimates of the state variable are derived. The numerical scheme for the problems is achieved through finite difference approximations. This process yields spatially-loaded implicit difference schemes, which reduce to parametric SLAEs. Therefore, the superposition property of SLAEs is employed to obtain a parametric representation of solutions using auxiliary linear systems of special parametric structures. In subsequent analysis, the unique solvability and the unconditional stability with convergence of the difference scheme, via the discrete energy method for non-positive load coefficients, are examined. Ultimately, several test examples are considered to validate the accuracy and efficiency of the

scheme.

To overcome the limited stability of explicit SFD schemes for one-dimensional (1D) and two-dimensional (2D) Caputo-type TFDEs, the NSFD schemes are constructed. At first, a nonstandard L1 (NSL1) approximation is constructed for the Caputo fractional derivative, and its local truncation error is derived. This NSL1 method is used to construct the NSFD scheme for a Caputo-type time-fractional IVP. The absolute stability of the resulting scheme is rigorously examined using the boundary locus method, and its performance is validated through test examples for various choices of denominator functions (DFs). Based on this framework, two explicit NSFD schemes are developed for 1D and 2D cases of the Caputo-type TFDEs. Their stability is further assessed using the discrete energy method, with a particular focus on the expansion of the stability region compared to SFD schemes. The convergence of the NSFD schemes is also established. Finally, a set of numerical examples is presented to demonstrate the accuracy and stability advantages of NSFD methods, with results illustrated through tables and graphical representations.

At the end, the Caputo-type time-fractional Hallaire (modified diffusion) equation (TFHE) with and without spatial loads is numerically investigated. NSFD schemes are developed for approximating the stated problems using NSL1 and central difference methods on uniform grids. The approximation of the spatially-loaded problem leads to a loaded difference scheme, for which an appropriate solution is appointed using the superposition property of SLAE to deal with linear loaded terms in the difference scheme. Thereafter, the difference schemes are also checked for the uniqueness of their solutions. The stability of the difference schemes and their convergence rate are proved via the discrete energy method. The accuracy and efficiency of the schemes are validated by test problems and showcased using tabular and graphical illustrations.

सार

मेट्रिक ग्राफ़ पर अवकल समीकरण, जिन्हें ल्यूमर ने 1980 के दशक में रैमीफिकेशन स्पेस के ढाँचे में प्रस्तुत किया था, गणितीय भौतिकी और इंजीनियरिंग में विभिन्न अनुप्रयोगों में आते हैं। वास्तव में, कुछ परिघटनाएँ हैं, जैसे कि तारों के नेटवर्क के नियंत्रित कंपन (हाइपरबोलिक तरंग समीकरण), खुले चैनल नेटवर्क में जल तरंग संचरण (बर्गर्स-प्रकार के समीकरण), आदि, जिन्हें मेट्रिक ग्राफ़ पर आंशिक अवकल समीकरणों (PDE) द्वारा प्रतिरूपित किया जा सकता है। दूसरी ओर, हाल के वर्षों में आंशिक कलन ने व्यापक रुचि आकर्षित की है, क्योंकि यह घात नियमों पर आधारित परिघटनाओं का प्रभावी ढंग से वर्णन कर सकता है। उल्लेखनीय रूप से, भिन्नात्मक विसरण समीकरण असामान्य विसरण की परिघटनाओं की व्याख्या करने में अत्यंत प्रासंगिक हैं, जो विशेष रूप से विभिन्न जैविक प्रणालियों में देखी गई हैं। इसके अलावा, मेट्रिक ग्राफ़ पर भिन्नात्मक आंशिक अवकल समीकरणों (FPDE) का उपयोग मेसोस्कोपिक नेटवर्क में असामान्य ऊष्मा परिवहन और नैनोस्केल नेटवर्क संरचनाओं और आणविक तारों में उप-विसरण प्रक्रियाओं जैसी महत्वपूर्ण समस्याओं के प्रतिरूपण के लिए भी किया जा सकता है। परवलयिक अवकल मॉडल से जुड़ी विभिन्न घटनाएँ, जैसे ऊष्मा स्थानांतरण, विसरण प्रक्रिया, आदि, अवशिष्ट (गैर-स्थानीय) प्रक्रियाओं के साथ होती हैं। इसलिए, भारित PDE का महत्वपूर्ण व्यावहारिक महत्व है, क्योंकि वे अन्य समयों और स्थानों पर अवस्था के गैर-स्थानीय प्रभावों द्वारा नियंत्रित वास्तविक-विश्व प्रक्रियाओं का मॉडल प्रस्तुत करते हैं। इसलिए, मीट्रिक ग्राफ़ पर भारित FPDE, निश्चित समय के उदाहरणों या निश्चित प्रदूषण स्रोत स्थानों पर प्रदूषकों द्वारा दूषित जलाशयों के नेटवर्क में असामान्य विसरण प्रक्रियाओं का प्रतिनिधित्व करने के लिए आवश्यक हो सकते हैं।

इस शोध प्रबंध में, मीट्रिक तारा ग्राफ़ पर समय-भिन्न भारित परवलयिक समीकरणों का मॉडलिंग, विश्लेषण और संख्यात्मक योजनाएँ प्रस्तुत की गई हैं। यह कार्य मुख्य रूप से पूरे शोध प्रबंध में एक मीट्रिक तारा ग्राफ़ (एक वृक्ष-सदृश ग्राफ़) पर कैप्टो-प्रकार के भारित समय-भिन्न विसरण समीकरणों (TFDE) पर विचार करता है। वास्तव में, एक तारा ग्राफ़ को अधिक सामान्य मीट्रिक ग्राफ़ के लिए एक आधारशिला के रूप में देखा जा सकता है। इसलिए, भारित समय-भिन्न परवलयिक समस्याओं (TFPE) पर अंतरालों के साथ-साथ मीट्रिक स्टार ग्राफ़ पर भी विचार किया जाता है। इन समस्याओं

का अस्तित्व और विशिष्टता भी स्थापित की जाती है। मानक परिमित अंतर (SFD) योजनाएँ अक्सर सीमित स्थिरता क्षेत्रों से ग्रस्त होती हैं, खासकर जब PDE पर एक स्पष्ट सेटअप में लागू की जाती हैं। इसलिए, अंतिम दो अध्यायों में, मानक योजनाओं से जुड़े स्थिरता क्षेत्रों को बढ़ाने में उनकी प्रभावकारिता को प्रदर्शित करने के लिए गैर-मानक परिमित अंतर (NSFD) सन्निकटनों को लागू किया गया है।

अध्ययन की शुरुआत विभिन्न क्रमों के लैंग्रेज अंतर्वेशन पर आधारित कैप्यूटो भिन्नात्मक व्युत्पन्न हेतु असतत सन्निकटनों के फूरियर त्रुटि विश्लेषण से होती है। एक समान जाल पर इन सन्निकटनों के लिए संशोधित तरंग संख्याएँ व्युत्पन्न की जाती हैं। संशोधित तरंग संख्याओं का उपयोग करते हुए, सन्निकटनों की विभेदन विशेषताओं को अंतर त्रुटियों के फूरियर विश्लेषण के माध्यम से परिमाणित किया जाता है। प्रत्येक सन्निकटन विधि के लिए मूल तरंग संख्याओं की संशोधित तरंग संख्याओं से तुलना करने वाले चित्रमय चित्रण प्रस्तुत किए गए हैं।

इसके बाद, कैप्यूटो भिन्नात्मक व्युत्पन्न हेतु विभिन्न सन्निकटन योजनाओं की सटीकता और दक्षता को मान्य करने के लिए एक परीक्षण भिन्नात्मक IVP पर विचार किया जाता है। एक असमान जाल पर कैप्यूटो व्युत्पन्न का सन्निकटन करने के लिए लैंग्रेज बहुपद अंतर्वेशन पर आधारित एक संख्यात्मक एल्गोरिथम का उपयोग किया जाता है। एक वर्गीकृत जाल पर सन्निकटन की ट्रंक्शन त्रुटि दर और इष्टतम ग्रेडिंग स्थिरांक, ग्रेडिंग $t_n = T \left(\frac{n}{N} \right)^r$ का उपयोग करके प्राप्त किए जाते हैं, जहाँ $r \geq 1$ जाल ग्रेडिंग पैरामीटर है। इस सन्निकटन का उपयोग करते हुए, स्थानिक विवेकीकरण को एकसमान रखते हुए, क्रमिक कालिक जाल पर कैप्यूटो-प्रकार TFDE के लिए एक परिमित अंतर योजना विकसित की गई है। इस योजना की अद्वितीय सुलझनीयता सामान्य r के लिए मैट्रिक्स विधि द्वारा स्थापित की गई है। इस योजना की बिना शर्त स्थिरता, एकसमान जाल पर, विविक्त ऊर्जा विधि द्वारा प्राप्त की गई है। $r = 1$ के लिए इस योजना के अभिसरण का विश्लेषण अ-चिकनी विलयनों के लिए किया गया है, और फिर इसे चिकने विलयनों तक विस्तारित किया गया है। अंत में, कई उदाहरणों में संख्यात्मक त्रुटि के अध्ययन के माध्यम से इस योजना की सटीकता की पुष्टि की गई है।

मीट्रिक ग्राफ़ पर कैप्यूटो समय-भिन्न परवल्यिक समस्याओं के लिए, विश्लेषण एक मीट्रिक स्टार ग्राफ़ पर प्रस्तुत समय-भिन्न अभिवहन-विसरण समीकरण (TFADE) से शुरू होता है। इस ग्राफ़ पर TFADE को हल करने के लिए एक परिमित अंतर योजना तैयार की जाती है, जिसमें आंतरिक नोड पर संगत प्रारंभिक, सीमांत और संचरण स्थितियों को शामिल किया जाता है। स्टार ग्राफ़ का चयन इस तथ्य से प्रेरित है कि किसी भी सामान्य मीट्रिक ग्राफ़ को स्टार ग्राफ़ के संग्रह में विघटित किया जा सकता है। इस और बाद की सभी समस्याओं में कैप्यूटो व्युत्पन्न के असतत सन्निकटन के लिए सुप्रसिद्ध $L1$ विधि का उपयोग किया जाता है। $\Delta x_i \leq 2$ के लिए परिणामी योजना की बिना शर्त स्थिरता असतत ऊर्जा विधि का उपयोग करके स्थापित की जाती है। इसके अतिरिक्त, योजना की अद्वितीय सुलझनीयता और उससे संबंधित त्रुटि अभिसरण दर की जाँच की जाती है। इसके बाद प्रस्तावित अंतर योजना की सटीकता और अभिसरण गुणों को मान्य करने के लिए संख्यात्मक प्रयोग प्रस्तुत किए जाते हैं।

इसके अलावा, प्रारंभिक और डिरिचलेट-प्रकार की सीमा स्थितियों वाले कालिक रूप से भारित TFDEs की संख्यात्मक रूप से जाँच की जाती है। सर्वप्रथम आइजेनफ़ंक्शन विस्तार विधि के माध्यम से एक सामान्य समाधान रूप स्थापित किया

जाता है, और कुछ पूर्व-अनुमानों के साथ समाधान के अस्तित्व और विशिष्टता को सिद्ध करके समस्या की सुस्थापितता प्रदर्शित की जाती है। कालिक रूप से भारित TFDE की एक परिमित अंतर योजना व्युत्पन्न की जाती है, जिसके परिणामस्वरूप एक कालिक रूप से भारित अंतर्निहित अंतर योजना प्राप्त होती है। भारित पद को कुशलतापूर्वक संभालने के लिए, रैखिक बीजीय समीकरणों (SLAEs) के निकायों के अध्यारोपण गुण का उपयोग किया जाता है, जिसके परिणामस्वरूप समाधान का एक उपयुक्त प्राचलिक निरूपण प्राप्त होता है। असतत ऊर्जा विधि द्वारा स्थापित अंतर योजना को विशिष्ट रूप से सुलझने योग्य, स्थिर और अभिसारी दिखाया गया है। प्रतिनिधि परीक्षण समस्याओं पर संख्यात्मक उदाहरण व्युत्पन्न योजना की सटीकता और दक्षता की पुष्टि करते हैं।

इस ढाँचे को आगे एक मीट्रिक स्टार ग्राफ़ पर शास्त्रीय और कालिक रूप से भारित विसरण समीकरणों के अध्ययन तक विस्तारित किया गया है, जो जटिल नेटवर्क-सदृश भौतिक प्रणालियों के अनुप्रयोगों से प्रेरित है। मीट्रिक ग्राफ़ पर भारित विसरण समीकरण के समाधान का अस्तित्व और विशिष्टता आइजेनफ़ंक्शन विस्तारों का उपयोग करके स्थापित की जाती है, जिसके साथ उपयुक्त पूर्व-अनुमान भी होते हैं। शास्त्रीय और कालिक भारित दोनों समस्याओं के लिए परिमित अंतर योजनाएँ जंक्शन पर संचरण स्थितियों के साथ निर्मित की जाती हैं, जिससे केंद्रीय नोड पर अतिरिक्त अंतर योजनाएँ उत्पन्न होती हैं। भारित पद की उपस्थिति प्राच्य निर्भरताएँ उत्पन्न करती है, जिन्हें स्पष्ट समाधान निरूपण प्राप्त करने के लिए SLAE के अध्यारोपण गुण का उपयोग करके कुशलतापूर्वक संबोधित किया जाता है। परिणामी योजनाएँ क्रमशः बिना शर्त और पर्याप्त स्थितियों के अंतर्गत स्थिर और अभिसारी सिद्ध होती हैं। संख्यात्मक योजनाओं की सुदृढ़ता और प्रयोज्यता को सत्यापित करने के लिए कई परीक्षण समस्याओं पर संख्यात्मक परिणाम प्राप्त किए जाते हैं।

समग्र अवस्था पर अनेक बिंदुवार स्थानिक प्रभावों वाली घटनाओं का प्रतिनिधित्व करने के लिए, एक अंतराल पर विषमांगी प्रकार की डिफरेंस सीमा स्थितियों और एक मीट्रिक तारा ग्राफ़ पर समरूप प्रकार की डिफरेंस सीमा स्थितियों वाले स्थानिक रूप से भारित कैप्टो-प्रकार TFDE का अध्ययन किया जाता है। गैलेकिन सन्निकटन विधि का उपयोग करके एक अंतराल पर निकाय की सुस्थिरता स्थापित की जाती है, और अवस्था चर के कुछ पूर्वानुमेय अनुमान प्राप्त किए जाते हैं। समस्याओं के लिए संख्यात्मक योजना परिमित अंतर सन्निकटनों के माध्यम से प्राप्त की जाती है। इस प्रक्रिया से स्थानिक रूप से भारित अंतर्निहित अंतर योजनाएँ प्राप्त होती हैं, जो पैरामीट्रिक SLAE में परिवर्तित हो जाती हैं। इसलिए, विशेष पैरामीट्रिक संरचनाओं की सहायक रैखिक प्रणालियों का उपयोग करके समाधानों का पैरामीट्रिक निरूपण प्राप्त करने के लिए SLAE के अध्यारोपण गुण का उपयोग किया जाता है। बाद के विश्लेषण में, गैर-धनात्मक भार गुणांकों के लिए असतत ऊर्जा विधि के माध्यम से, अंतर योजना की अद्वितीय सुलझने योग्यता और अभिसरण के साथ बिना शर्त स्थिरता की जाँच की जाती है। अंततः, योजना की सटीकता और दक्षता को मान्य करने के लिए कई परीक्षण उदाहरणों पर विचार किया जाता है।

एक-आयामी (1D) और द्वि-आयामी (2D) कैप्टो-प्रकार TFDEs के लिए स्पष्ट SFD योजनाओं की सीमित स्थिरता को दूर करने के लिए, NSFD योजनाओं का निर्माण किया जाता है। सबसे पहले, कैप्टो भिन्नात्मक व्युत्पन्न के लिए एक

गैर-मानक L1 (NSL1) सन्निकटन का निर्माण किया जाता है, और इसकी स्थानीय ट्रंकेशन त्रुटि निकाली जाती है। इस NSL1 विधि का उपयोग कैपुटो-प्रकार के समय-भिन्नात्मक IVP के लिए NSFD योजना के निर्माण के लिए किया जाता है। परिणामी योजना की निरपेक्ष स्थिरता की सीमा बिन्दुपथ विधि का उपयोग करके गहन जाँच की जाती है, और इसके प्रदर्शन को हर फलनों (DFs) के विभिन्न विकल्पों के लिए परीक्षण उदाहरणों के माध्यम से मान्य किया जाता है। इस ढाँचे के आधार पर, कैपुटो-प्रकार TFDEs के 1D और 2D मामलों के लिए दो स्पष्ट NSFD योजनाएँ विकसित की गई हैं। उनकी स्थिरता का आगे असतत ऊर्जा विधि का उपयोग करके मूल्यांकन किया जाता है, जिसमें SFD योजनाओं की तुलना में स्थिरता क्षेत्र के विस्तार पर विशेष ध्यान दिया जाता है। NSFD योजनाओं का अभिसरण भी स्थापित किया जाता है। अंत में, NSFD विधियों की सटीकता और स्थिरता के लाभों को प्रदर्शित करने के लिए संख्यात्मक उदाहरणों का एक समूह प्रस्तुत किया गया है, जिसके परिणाम तालिकाओं और चित्रमय निरूपणों के माध्यम से दर्शाए गए हैं।

अंत में, स्थानिक भार सहित और उसके बिना, कैपुटो-प्रकार के समय-भिन्नात्मक हैलेयर (संशोधित विसरण) समीकरण (TFHE) की संख्यात्मक रूप से जाँच की गई है। NSL1 और केंद्रीय अंतर विधियों का उपयोग करके समरूप ग्रिडों पर उल्लिखित समस्याओं का सन्निकटन करने के लिए NSFD योजनाएँ विकसित की गई हैं। स्थानिक रूप से भारित समस्या का सन्निकटन एक भारित अंतर योजना की ओर ले जाता है, जिसके लिए अंतर योजना में रैखिक भारित पदों से निपटने के लिए SLAE के अध्यारोपण गुण का उपयोग करके एक उपयुक्त समाधान नियुक्त किया जाता है। इसके बाद, अंतर योजनाओं की उनके समाधानों की विशिष्टता की भी जाँच की जाती है। अंतर योजनाओं की स्थिरता और उनकी अभिसरण दर को असतत ऊर्जा विधि द्वारा सिद्ध किया जाता है। योजनाओं की सटीकता और दक्षता को परीक्षण समस्याओं द्वारा मान्य किया जाता है और सारणीबद्ध तथा चित्रमय चित्रों का उपयोग करके प्रदर्शित किया जाता है।

Contents

Certificate	i
Acknowledgments	iii
Abstract	v
List of Figures	xvii
List of Tables	xxi
List of Symbols	xxv
List of Abbreviations	xxvii
1 Introduction	1
1.1 Differential equations on metric graphs	8
1.2 Fractional differential equations on metric graphs	10
1.3 Fractional loaded differential equations on metric graphs	15
1.4 Nonstandard finite difference schemes	19
1.5 Organization of the thesis	21
2 High-order approximation to Caputo derivative and time-fractional diffusion equations having non-smooth solutions on graded mesh	23
2.1 Introduction	23
2.1.1 Lagrange interpolations and associated Caputo derivative approximations	26
2.2 Fourier error analysis of Caputo derivative approximations on uniform mesh	29
2.2.1 Numerical results	35
2.3 High-order approximation to Caputo derivative on graded mesh	37

2.3.1	Truncation error analysis	40
2.4	Approximation of TFDEs having non-smooth solutions on graded mesh . . .	43
2.4.1	Stability and convergence analysis on uniform mesh	45
2.5	Numerical results	50
3	L1-type difference approximation of time-fractional advection-diffusion equation on metric star graph	57
3.1	Introduction	57
3.2	Approximation of TFADE on metric star graph	59
3.3	Stability and convergence analysis	63
3.4	Numerical results	68
4	Modeling, analysis and simulation of temporally-loaded diffusion equations: Time-fractional on interval and classical on metric star graph	73
4.1	Introduction	73
4.2	Approximation of temporally-loaded TFDEs on interval	77
4.2.1	Function spaces	77
4.2.2	Existence and uniqueness results	79
4.2.3	Nonlocal loaded difference approximation	86
4.2.4	Stability and convergence analysis	91
4.3	Approximation of classical diffusion equation on metric star graph	94
4.3.1	Finite difference approximation	94
4.3.2	Stability and convergence analysis	97
4.4	Approximation of temporally-loaded diffusion equation on metric star graph	102
4.4.1	Function spaces	102
4.4.2	Existence and uniqueness results	103
4.4.3	Nonlocal loaded difference approximation	110
4.5	Numerical results	120
5	Spatially-loaded time-fractional diffusion equation on interval and metric star graph: Well-posedness, discretization, and simulation	131
5.1	Introduction	131
5.2	Function spaces	135
5.2.1	Notations	135
5.2.2	Fractional integral and derivatives	135
5.2.3	Function spaces	137
5.3	Well-posedness results for spatially-loaded TFDE on interval	137

5.4	Approximation of the spatially-loaded TFDE on interval	149
5.4.1	Nonlocal loaded difference approximation	151
5.4.2	Stability and convergence analysis	153
5.5	Approximation of the spatially-loaded TFDE on metric star graph	158
5.5.1	Nonlocal loaded difference approximation	159
5.5.2	Stability and convergence analysis	165
5.6	Numerical results	172
6	Stability-enhanced nonstandard finite difference schemes for solving one and two-dimensional time-fractional diffusion equations	185
6.1	Introduction	185
6.2	NSL1 approximation to Caputo fractional derivative	187
6.3	NSFD scheme for Caputo-type time-fractional IVP	189
6.3.1	Absolute stability analysis for NSL1 method	189
6.3.2	Numerical results for NSL1 method	191
6.4	Explicit NSFD scheme for 1D TFDE	194
6.4.1	Explicit finite difference approximation	195
6.4.2	Stability and convergence analysis	196
6.5	Explicit NSFD scheme for 2D TFDE	199
6.5.1	Explicit finite difference approximation	199
6.5.2	Stability and convergence analysis	200
6.6	Numerical results	203
7	A nonstandard finite difference approach for solving a time-fractional Hal-laire equation with and without spatial loads	209
7.1	Introduction	209
7.2	NSFD approximation for TFHE	211
7.2.1	NSFD approximation	212
7.2.2	Stability and convergence analysis	214
7.3	NSFD approximation of spatially-loaded TFHE	217
7.3.1	Nonlocal loaded NSFD approximation	217
7.3.2	Stability and convergence analysis	219
7.4	Numerical results	224
8	Conclusion and future directions	231
8.1	Conclusion	231
8.2	Future directions	234

Bibliography	235
Curriculum Vitae	249

List of Figures

1.1	Examples of cyclic and tree-like graphs	3
1.2	A star graph consisting of k edges.	4
2.1	A graded temporal mesh with mesh grading $t_n = T\left(\frac{n}{N}\right)^r$ and $r \geq 1$	26
2.2	Modified wavenumbers ω^α of Caputo derivative and its approximations vs. wavenumber ω for $M = 50$ and different values of α	34
2.3	Comparison of exact solution and numerical solution of Example 2.5.1 for $\alpha = 0.3$ and $M = N = 80$	52
2.4	Comparison of exact solution and numerical solution of Example 2.5.2 for $\alpha = 0.3$ and $M = N = 80$	54
3.1	Comparison between exact solution and numerical solution for Example 3.4.1 at $\alpha = 0.1$ and $M = N = 40$	71
3.2	Comparison between exact solution and numerical solution for Example 3.4.2 at $\alpha = 0.3$ and $M = N = 40$	72
3.3	Comparison between exact solution $u(x, 1) = (u_i(x, 1))_{i=1}^3$ and numerical solution $U_m^N = (U_{i,m}^N)_{i=1}^3$ on a star graph having three edges with $M = N = 40$	72
4.1	A network of water channels with acid rain at time $\hat{t}_s$ affecting the overall water concentration $u_i(x, t)$	75
4.2	Comparison between the exact solution and numerical solution of Example 4.5.1 at $M = N = 40$	122
4.3	Comparison between the exact solution and numerical solution of Example 4.5.2 at and $M = N = 40$	123
4.4	Numerical solutions at final time $T = 1$ and $M = 80$, $N = 40$ for different values of α	124
4.5	Numerical solutions at final time $T = 1$, $N = 40$, and $\alpha = 0.5$ for different values of M	124

4.6	Comparison between exact solution and numerical solution of Example 4.5.3 for $M = N = 40$ (a) on edges $e_1 = e_2$; (b) on a single edge e_3	126
4.7	Numerical solutions of Example 4.5.3 at final time $T = 1$ and $N = 40$ for different values of M	126
4.8	Comparison between exact solution and numerical solution of Example 4.5.4 for $M = N = 40$ (a) on edges $e_1 = e_2$; (b) on a single edge e_3	128
4.9	Numerical solutions for Example 4.5.4 at final time $T = 1$ and $N = 40$ for different values of M	128
4.10	Comparison between exact solution $u(x, 1) = (u_i(x, 1))_{i=1}^3$ and numerical solution $U_m^N = (U_{i,m}^N)_{i=1}^3$ on a star graph having three edges with $M = N = 40$	129
5.1	A groundwater wellsystem with flow of water at point $\hat{x}_s$ affecting overall water level $u(x, t)$	133
5.2	Pointwise error plots of Example 5.6.1 at $\alpha = 0.5$ and final time $T = 1$ for different values of (a) M (b) N	174
5.3	Pointwise error plots of Example 5.6.2 at $\alpha = 0.5$ and final time $T = 1$ for different values of (a) M (b) N	175
5.4	Pointwise error plots of Example 5.6.3 at $\alpha = 0.5$ and final time $T = 1$ for different values of (a) M (b) N	177
5.5	Numerical solutions of Example 5.6.4 with and without loads at $\alpha = 0.5$, $M = N = 80$ and different times.	179
5.6	Absolute error between the numerical solutions of Example 5.6.4 with and without loads at $\alpha = 0.5$, $M = N = 80$ and different times.	179
5.7	Comparison plots between numerical solution at final time $T = 1$, $M = 80$, $N = 40$ and different values of α	180
5.8	Comparison between exact solution and numerical solution of Example 5.6.5 for $M = N = 80$ (a) on edges $e_1 = e_2$; (b) on a single edge e_3	182
5.9	Numerical solutions for Example 5.6.5 at final time $T = 1$, $\alpha = 0.5$, and $N = 80$ for different values of M	182
5.10	Numerical solutions for Example 5.6.5 at final time $T = 1$ and $M = N = 80$ for different values of α	183
6.1	Locus plots of $\hat{x}(s)$ and $\hat{y}(s)$ for $0 \leq s < 2\pi$ at different values of α with $n = 100000$ and $\theta = \frac{\alpha\pi}{2}$	192
6.2	Curve plots of r_{max} against n with $N = 1000$ at $\alpha = 0.5$ and different values of $\hat{x}(s)$	193

6.3	The (a) linear and (b) log-log plots for the maximum absolute errors of SFD and NSFD approximations at final time $T = 1$ and $\alpha = 0.9$ against the number of spatial subintervals.	206
6.4	Comparison of exact and numerical solutions of Example 6.6.1 at final time $T = 1$ with $\alpha = 0.9$ and $M = 44$, $N = 10000$ for SFD and NSFD approximations.	207
6.5	Contour plots of exact and numerical solutions of Example 6.6.2 at final time $T = 1$ with $\alpha = 0.9$ and $M = 32$, $N = 20000$ for SFD and NSFD approximations.	208
7.1	Comparison of exact and numerical solutions of Example 7.4.1 at final time $T = 1$ with $\alpha = 0.5$ and $M = 80$, $N = 1000$ for SFD and NSFD approximations.	227
7.2	Comparison of exact and numerical solutions of Example 7.4.2 at final time $T = 1$ with $\alpha = 0.5$ and $M = 80$, $N = 1000$ for SFD and NSFD approximations.	229

List of Tables

2.1	Absolute errors and convergence order of L1 scheme at $T = 1$ and different values of α	36
2.2	Absolute errors and convergence order of L1-2 scheme at $T = 1$ and different values of α	36
2.3	Absolute errors and convergence order of L1-23 scheme at $T = 1$ and different values of α	36
2.4	Total elapsed time (in sec) at $\alpha = 0.5$ for Caputo derivative approximations at different values of N	37
2.5	Number of +ve and -ve coefficients (p_j) for $N = 50$ and $\alpha = 0.5$ for different values of n	49
2.6	Maximum temporal errors and order of convergence (T_{rate}) for $r = 1$ and $\varrho = 1$	51
2.7	Maximum temporal errors and order of convergence (T_{rate}) for $r = 1$ and $\varrho = 30$	51
2.8	Maximum spatial errors and order of convergence (S_{rate}) for $r = 1$ and $\varrho = 1$	52
2.9	Maximum temporal errors and order of convergence (T_{rate}) for $r = 1$ and $\varrho = 1$	53
2.10	Maximum temporal errors and order of convergence (T_{rate}) for $r = \frac{4-\alpha}{\alpha}$ and $\varrho = 1$	53
2.11	Maximum spatial errors and order of convergence (S_{rate}) for $r = 1$ and $\varrho = 1$	54
2.12	Comparison of maximum temporal errors for $\alpha = 0.8$, $\varrho = 1$ and different values of r	55
3.1	Maximum spatial errors and spatial convergence for Example 3.4.1 at $\alpha = 0.1$ and $N = 10000$	70
3.2	Maximum temporal errors and temporal convergence for Example 3.4.1 at $\alpha = 0.5$ and $M = 1000$	70
3.3	Maximum spatial errors and spatial convergence for Example 3.4.2 at $\alpha = 0.3$ and $N = 10000$	71

4.1	Maximum temporal errors and convergence at time $T = 1$ and $M = 1000$ for different values of α	121
4.2	Maximum spatial errors and convergence at time $T = 1$ and $N = 1000$ for different values of α	121
4.3	Maximum temporal errors and convergence at time $T = 1$ and $M = 1000$ for different values of α	122
4.4	Maximum spatial errors and convergence at time $T = 1$ and $N = 1000$ for different values of α	123
4.5	Spatial errors and spatial convergence rate for Example 4.5.3 at $N = 10000$ and different values of M	125
4.6	Temporal errors and temporal convergence rate for Example 4.5.3 at $M = 100$ and different values of N	125
4.7	Spatial errors and spatial convergence rate for Example 4.5.4 at $N = 10000$ and different values of M	127
4.8	Temporal errors and temporal convergence rate for Example 4.5.4 at $M = 100$ and different values of N	127
5.1	Maximum temporal errors and order of convergence at $T = 1$ and $M = 2000$	173
5.2	Maximum spatial errors and order of convergence at $T = 1$ and $N = 2000$	173
5.3	Maximum temporal errors and order of convergence at $T = 1$ and $M = 2000$	174
5.4	Maximum spatial errors and order of convergence at $T = 1$ and $N = 2000$	175
5.5	Maximum absolute nodal temporal errors and order of convergence at $M = 10000$	176
5.6	Maximum spatial errors and order of convergence at $T = 1$ and $N = 2000$	176
5.7	Maximum absolute Cauchy temporal errors and order of convergence at $T = 1$ and $M = 1000$	178
5.8	Maximum absolute Cauchy spatial errors and order of convergence at $T = 1$ and $N = 1000$	178
5.9	Maximum spatial errors and spatial convergence rate for Example 5.6.5 at $N = M^2$, $\alpha = 0.5$ and different values of M	181
5.10	Maximum temporal errors and temporal convergence rate for Example 5.6.5 at $M = 100$, $\alpha = 0.5$ and different values of N	182
6.1	Maximum absolute errors and corresponding convergence for Example 6.3.1 at $T = 1$ for different α , N and $\varphi(\Delta t)$	194
6.2	Maximum absolute errors and corresponding convergence for Example 6.3.2 at $T = 1$ for different α , N and $\varphi(\Delta t)$	195

6.3	Maximum spatial errors and convergence rate at $T = 1$, $\alpha = 0.9$, and $N = 10000$ with $\phi(\Delta t) = \Delta t^\alpha$.	204
6.4	Maximum spatial errors and convergence rate at $T = 1$, $\alpha = 0.9$, and $N = 10000$ with $\phi(\Delta t) = \Delta t^\alpha$.	205
6.5	Maximum spatial errors and convergence rate at $T = 1$, $\alpha = 0.9$, and $N = 10000$ with $\phi(\Delta t) = \left(\frac{1-e^{-100\Delta t}}{100}\right)^\alpha$.	205
6.6	Maximum spatial errors and convergence rate at $T = 1$, $\alpha = 0.9$, and $N = 20000$ with $\phi(\Delta t) = \Delta t^\alpha$.	207
6.7	Maximum spatial errors and convergence rate at $T = 1$, $\alpha = 0.9$, and $N = 20000$ with $\phi(\Delta t) = \Delta t^\alpha$.	207
6.8	Maximum spatial errors and convergence rate at $T = 1$, $\alpha = 0.9$, and $N = 10000$ with $\phi(\Delta t) = \left(\frac{1-e^{-100\Delta t}}{100}\right)^\alpha$.	208
7.1	Maximum spatial errors and convergence rate at $T = 1$, $\alpha = 0.5$, and $N = 10000$ with $\phi(\Delta t) = \Delta t^\alpha$.	225
7.2	Maximum spatial errors and convergence rate at $T = 1$, $\alpha = 0.5$, and $N = 10000$ with $\phi(\Delta t) = \Delta t^\alpha$.	225
7.3	Maximum spatial errors and convergence rate at $T = 1$, $\alpha = 0.5$, and $N = 10000$ with $\phi(\Delta t) = \left(\frac{1-e^{-100\Delta t}}{100}\right)^\alpha$.	226
7.4	Maximum temporal errors and convergence rate at $T = 1$ and $M = 1000$ with standard discretization.	226
7.5	Maximum spatial errors and convergence rate at $T = 1$, $\alpha = 0.5$, and $N = 10000$ with $\phi(\Delta t) = \Delta t^\alpha$.	228
7.6	Maximum spatial errors and convergence rate at $T = 1$, $\alpha = 0.5$, and $N = 10000$ with $\phi(\Delta t) = \Delta t^\alpha$.	228
7.7	Maximum spatial errors and convergence rate at $T = 1$, $\alpha = 0.5$, and $N = 10000$ with $\phi(\Delta t) = \left(\frac{1-e^{-100\Delta t}}{100}\right)^\alpha$.	228
7.8	Maximum temporal errors and convergence rate at $T = 1$ and $M = 1000$ with standard discretization.	229

List of Symbols

Symbol	Meaning
$\mathbb{N}$	Set of natural numbers
$\mathbb{R}$	Set of real numbers
$\mathbb{Z}$	Set of integers
$A \subseteq X$	A is a subset of X
$A \cap B$	The intersection of A and B
$A \cup B$	The union of A and B
$C[a, b]$	set of all continuous functions
$C^n[a, b]$	Space of all functions having n times continuously differentiable on $[a, b]$
$AC^n[a, b]$	Space of functions f such that $f \in C^{n-1}([a, b])$ and $f^{(n-1)} \in AC([a, b])$

List of Abbreviations

Abbreviation	Full Form
AC	Absolutely Continuous
DF	Denominator Function
FDE	Fractional Differential Equation
FnDE	Functional Differential Equation
FPDE	Fractional Partial Differential Equation
IVP	Initial Value Problem
IBVP	Initial Boundary Value Problem
SFD	Standard Finite Difference
NSFD	Nonstandard Finite Difference
NSL1	Nonstandard L1
ODE	Ordinary Differential Equation
PDE	Partial Differential Equation
LHS	Left-Hand Side
RHS	Right-Hand Side
SLAE	System of Linear Algebraic Equations
TFDE	Time-Fractional Diffusion Equation
TFADE	Time-Fractional Advection-Diffusion Equation
TFPE	Time-Fractional Parabolic Equation
TFHE	Time-Fractional Hallaire Equation

