ANALYSIS AND DISCRETIZATION FOR OPTIMAL CONTROL PROBLEMS GOVERNED BY FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS ON METRIC GRAPHS

VAIBHAV MEHANDIRATTA

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI

June 2022

© Indian Institute of Technology Delhi (IITD), New Delhi, 2022

ANALYSIS AND DISCRETIZATION FOR OPTIMAL CONTROL PROBLEMS GOVERNED BY FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS ON METRIC GRAPHS

by

VAIBHAV MEHANDIRATTA

Department of Mathematics

Submitted

in fulfillment of the requirements of the degree of Doctor of Philosophy

to the

INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI

June 2022

Dedicated to

My Family

Certificate

This is to certify that the thesis entitled **"Analysis and discretization for optimal control problems governed by fractional differential equations on metric graphs"** submitted by **"Mr. Vaibhav Mehandiratta"** to the Indian Institute of Technology Delhi, for the award of the Degree of **Doctor of Philosophy**, is a record of the original bonafide research work carried out by him under my supervision and guidance. The thesis has reached the standards fulfilling the requirements of the regulations relating to the degree.

The results contained in this thesis have not been submitted in part or full to any other university or institute for award of any degree or diploma.

New Delhi
June 2022

Prof. Mani Mehra
Professor
Department of Mathematics
Indian Institute of Technology Delhi

Acknowledgements

With deep sense of gratitude, I would like to thank the people without whom this thesis would not have been possible.

First and foremost, I would like to express my sincerest gratitude to my advisor, Prof. Mani Mehra, for her invaluable guidance and for her continuous help and unconditional support in all stages of this thesis. I would also like to thank her for being an open person to ideas, and for encouraging and helping me to shape my interests and ideas. This thesis would not happen to be possible without the ardent support and care she provided me academically and personally.

It is with immense gratitude that I acknowledge Prof. Günter Leugering, former vice president, FAU, Germany. His advices and insightful discussions were invaluable to me in these significant years. His energetic attitude towards research always inspires me to work harder and develop innovative ideas. I really appreciate him for always being so supportive.

I owe a special thanks to Dr. Vivek Kumar Aggarwal, Delhi Technological University, Delhi, for his valuable insights and discussions. I am grateful for the support I received from him.

I am thankful to IIT Delhi authorities for providing me the necessary facilities for the smooth completion of my Ph.D. I would like to give special thanks to my Student Research Committee members: Prof. K. Sreenadh , Dr. Kamana Porwal, and Dr. Ajeet kumar for their valuable time and suggestions. A special thanks to Prof. S. Dharmaraja, Head of the Department, for his support and affection. I express my gratitude to all the faculty members and staff of the Department of Mathematics, IIT Delhi, for their support. A special thanks to my seniors Dr. Kuldip Singh Patel and Dr. Ankita Shukla for providing me academic assistance and personal support whenever I required it.

I would like to use this platform to thank the wonderful people I met during my Ph.D. and who made this entire learning experience in IIT Delhi productive and fun. I want to thank my friends Deepak, Rohit, Pradeep, Sandeep, Navnit, Diksha, Naveen, Lalit, Kanupriya, Shakti, Satyam, Abhay, and my lovely juniors Nitin, Abhishek, and Shweta for their friendly assistance. I would also like to extend my appreciation to my dear friends Sumit, Gaurav, Vivek, Chirag, and Gurdeep for their constant motivation during hard times.

Above all, I would like to thank my parents, Geeta Mehandiratta and Chander Kumar, for their love, blessings, support, encouragement, sacrifice, and unwavering belief in me. Without them, I would not be the person I am today. Thank you for always being there with me. I also acknowledge my elder brother Anubhav Mehandiratta for unconditional love and support. A special thanks to my closest friend, Priyamvada, who always supported and cheered me up in all my struggles, and who I cannot thank enough for encouraging me throughout this journey.

Finally, I would like to thank the Almighty who has blessed me with an abundance of opportunity and good fortune.

June 2022 *Vaibhav Mehandiratta*

Abstract

Differential equations on metric graphs, introduced by Lumer in the 1980s in the framework of ramification spaces, have various applications in mathematical physics and engineering. Indeed, there are certain phenomena such as controlled vibrations of networks of strings (hyperbolic wave equations), water wave propagation in open channel networks (Burgers type equation) etc., that can be modeled by partial differential equations (PDEs) on metric graphs. On the other hand, fractional calculus in recent years has attracted broad interest since it can effectively describe phenomena based on power law. Notably, the corresponding fractional diffusion equations are of great relevance in explaining the phenomena of anomalous diffusion, which, in particular, has been observed in various biological systems. Moreover, fractional differential equations (FDEs) on metric graphs can also be used to model important problems such as anomalous heat transport in mesoscopic networks and subdiffusion processes in nanoscale network structures and molecular wires.

In this thesis, we are concerned with the analysis and discretization for fractional differential equations and corresponding optimal control problems on metric graphs. We have predominantly considered the fractional optimal control problems (FOCPs) on the metric star graph (a tree-like graph) throughout the thesis. Indeed, star graph can be seen as a building block for more general metric graphs. Moreover, it also allows simplicity in describing the characteristics of different approaches on the metric graphs. However, as evident from various real-world applications, significant networks (or graphs) also include

cyclic sub-graphs. Therefore, for completeness, we have also considered and analyzed the problems on metric graphs containing cycles.

We started with the study of existence, uniqueness and stability results for nonlinear fractional boundary value problems (FBVPs) on two different metric graphs, namely, star graph and tadpole graph. Using the Banach contraction principle, we proved the existence and uniqueness results for the considered problems by assuming the Lipschitz continuity of the nonlinear functions. By means of Schaefer's and Krasnoselskii's fixed point theorems, we have also established the existence of at least one solution for the nonlinear FBVP on a star graph and a tadpole graph, respectively, with weaker assumptions on the nonlinear functions. Moreover, different kinds of Ulam-type stability results have been derived for the FBVP on a tadpole graph. The applicability of the obtained results has been demonstrated via various examples.

In the case of fractional optimal control problems on metric graphs, we initially considered the optimal control problems governed by nonlinear FBVPs on the metric star graph. We derived the adjoint system and the necessary optimality conditions for the considered FOCP. The existence and uniqueness results for the resulting adjoint system have been proved in the weighted space using the Banach contraction principle. Moreover, a difference scheme has been proposed to find the approximate solution of the considered optimal control problem. The feasibility of the proposed difference scheme has been demonstrated via examples.

Before embarking on the analysis and discretization of the optimal control problems driven by fractional PDEs, particularly time-fractional parabolic equations, we first described the time-fractional diffusion equations (TFDEs) and time-fractional Burgers equations (TFBEs) on the metric star graph and exploited the well-known variational iteration method (VIM) to obtain the analytic/approximate solution of the resulting problems. However, the TFBEs have been particularly studied to show the effectiveness of the method for the nonlinear fractional differential equations on metric star graphs. Precisely, we derived the analytic solution for the linear FBVP and the time-fractional diffusion equation on the metric star graph using the proposed VIM. For the nonlinear TFBE, we

obtained the approximate solution using VIM and verified the efficiency of the method by considering a particular example of TFBE on a metric star graph with three edges.

We described the optimal control problems governed by time-fractional diffusion equations on the metric star graph while admitting both the distributed and boundary control. We proved the well-posedness results for the governing equations (TFDEs) on the metric star graph using the method of eigenfunction expansion. Moreover, we proposed a finite difference scheme to find the approximate solution to such problems. Using the discrete energy method, we proved the unconditional stability of the proposed difference scheme and derived the convergence. For the corresponding optimal control problem on the metric star graph, we derived the equivalent optimality system using the Lagrange multiplier method and fractional integration by parts formula. We also proved that the considered optimal control problem has a unique optimal solution. Moreover, based on the difference scheme for the TFDEs, we derived the discrete version of the resulting optimality system to find the approximate solution of the considered optimal control problem. We demonstrate the applicability of the proposed scheme by considering examples for the TFDEs and corresponding optimal control problems on a metric star graph with three edges.

In order to show the applicability of the FOCPs on the broader class of metric graphs, we described the optimal control problems driven by time-fractional parabolic equations (TFPEs) with time-dependent coefficients on the general metric graphs. Using the Galerkin method, we obtained the well-posedness results for the weak solution of the governing equation (state equation). Moreover, we proved the existence and uniqueness of the optimal solution for the corresponding optimal control problem and derived the equivalent optimality system that characterizes the control. A difference scheme based on the finite difference method has been proposed to find the approximate solution of the time-fractional parabolic equations and corresponding optimal control problems on the general metric graphs. We demonstrate the applicability of the proposed difference scheme for the TFPE on a star graph and a graph consisting of a cycle (triangle) with edge appendices to each multiple node. However, we verify the applicability of the discrete

optimality system, particularly for a metric star graph.

Finally, we considered the distributed optimal control problems governed by space-time fractional parabolic equations (STFPEs) involving time-fractional Caputo derivatives and spatial fractional derivatives of the Sturm-Liouville type on a single edge (bounded open interval) and metric star graph. First, we proved the well-posedness results for the weak solution of the state equation on a single edge. Then, we proved that the quadratic distributed optimal control problem associated to the STFPEs on single edge admits a unique solution, and derived the associated optimality system that characterizes the control variable. A similar investigation has been done for the STFPEs and corresponding optimal control problem on the considered metric star graph. Moreover, we developed a difference scheme to find the approximate solution of the STFPEs on the interval as well as on a star graph. However, for the corresponding optimal control problems, we develop the difference scheme, particularly for the approximate solution on the single edge. Numerical illustrations are presented on the unit interval and metric star graph with three edges to demonstrate the applicability and feasibility of the proposed difference scheme.

सार

मीट्रिक ग्राफ़ पर डिएफइरेंशियल इक्वेशन, जो ल्यूमर द्वारा 1980 के दशक में रैमिफिकेशन स्पेस के ढांचे में पेश किए गए थे, उनका गणितीय भौतिकी और इंजीनियरिंग मे विभिन्न अनुप्रयोग है । वास्तव में, कुछ निश्चित घटनाएं हैं जैसे स्ट्रिंग्स के नेटवर्क के नियंत्रित कंपन (हाइपरबोलिक वेव इक्वेशन), ओपन चैनल नेटवर्क्स में वाटर वेव प्रोपेगेशन (बर्गर टाइप इक्वेशन) आदि, जिन्हें मेट्रिक ग्राफ़ पर आंशिक डिएफइरेंशियल इक्वेशन (पीडीई) द्वारा मॉडल किया जा सकता है। दूसरी ओर, हाल के वर्षों में भिन्नात्मक कलन ने व्यापक रुचि को आकर्षित किया है क्योंकि यह प्रभावी रूप से घात नियम के आधार पर घटना का वर्णन कर सकता है। विशेष रूप से, संबंधित भिन्नात्मक समीकरण असंगत भिन्न उपयोग की घटनाओं को समझाने में बहुत प्रासंगिक हैं जो विशेष रूप से, विभिन्न जैविक प्रणालियों में देखा गया है। इसके अलावा, मीट्रिक ग्राफ़ पर भिन्नात्मक डिएफइरेंशियल इक्वेशन (FDEs) का उपयोग महत्वपूर्ण समस्याओं जैसे कि मेसोस्कोपिक नेटवर्क में विषम गर्मी परिवहन और नैनोस्केल नेटवर्क संरचनाओं और आणविक तारों के सबडिफयूजन प्रक्रियाओं के मॉडल के लिये भी किया जा सकता है।

इस थीसिस में, हम मीट्रिक ग्राफ़ पर भिन्नात्मक अंतर समीकरणों और संबंधित इष्टतम नियंत्रण समस्याओं से संबंधित विश्लेषण और विवेकीकरण करेंगे। हमने, थीसिस में मेट्रिक स्टार ग्राफ (एक पेड़ जैसा ग्राफ) पर मुख्य रूप से भिन्नात्मक इष्टतम नियंत्रण समस्याओं (एफओसीपी) पर विचार किया है। दरअसल, अधिक सामान्य मीट्रिक ग्राफ़ के लिए स्टार ग्राफ़ को बिल्डिंग ब्लॉक के रूप में देखा जा सकता है। इसके अलावा, इससे मीट्रिक ग्राफ़ पर विभिन्न दृष्टिकोणों की विशेषताओं का आसानी से वर्णन किया जा सकता है। हालांकि, जैसा कि विभिन्न वास्तविक दुनिया के अनुप्रयोगों से स्पष्ट है, महत्वपूर्ण नेटवर्क (या ग्राफ) में चक्रीय उप-ग्राफ भी शामिल हैं। इसलिए, पूर्णता के लिए, हमने चक्रयुक्त वाले मीट्रिक ग्राफ़ की समस्याओं पर भी विचार और विश्लेषण किया है।

हमने दो अलग मीट्रिक ग्राफ़, अर्थात् स्टार ग्राफ़ और टैडपोल ग्राफ़, पर अरैखिक भिन्नात्मक सीमा मान समस्याओं (FBVPs) के लिए अस्तित्व, विशिष्टता और स्थिरता परिणामों के अध्ययन के साथ शुरुआत की। बानाच संकुचन सिद्धांत का उपयोग करते हुए, गैर-रेखीय फंकशन की Lipschitz निरंतरता को मानकर, हमने विचार की गई समस्याओं के अस्तित्व और विशिष्टता के परिणामों को साबित किया। Schaefer's और Krasnoselskii के निश्चित बिंदु प्रमेयों के माध्यम से, हमने अरेखीय एफबीवीपी के लिए स्टार ग्राफ़ और टैडपोल ग्राफ़ पर क्रमशः कम से कम एक समाधान के अस्तित्व को स्थापित किया है, जिसमें अरेखीय फ़ंक्शन पर कमजोर धारणाएं हैं। इसके अलावा, टैडपोल ग्राफ पर एफबीवीपी के लिए उलम-प्रकार स्थिरता परिणाम प्राप्त किए गए हैं । प्राप्त परिणामों की प्रयोज्यता विभिन्न उदाहरणों के माध्यम से प्रदर्शित किया।

मीट्रिक ग्राफ़ पर भिन्नात्मक इष्टतम नियंत्रण समस्याओं के मामले में, हमने प्रारंभ में मीट्रिक स्टार ग्राफ़ पर गैर-रेखीय एफबीवीपी द्वारा शासित इष्टतम नियंत्रण समस्याओं पर विचार किया है। हमने एफओसीपी आसन्न प्रणाली और के लिए आवश्यक इष्टतमता की स्थिति प्राप्त की है। बानाच संकुचन सिद्धांत का उपयोग करके भारित स्थान में परिणामी आसन्न प्रणाली के अस्तित्व और विशिष्टता के परिणाम साबित किये गये हैं। इसके अलावा, इष्टतम नियंत्रण समस्या का अनुमानित समाधान खोजने के लिए एक अंतर योजना का प्रस्तावित की गयी है। प्रस्तावित अंतर योजना की व्यवहार्यता को उदाहरणों के माध्यम से प्रदर्शित किया गया है।

भिन्नात्मक पीडीई, विशेष रूप से समय-आंशिक परवलयिक समीकरणों द्वारा संचालित इष्टतम नियंत्रण समस्याओं के विश्लेषण और विवेकीकरण को शुरू करने से पहले, हमने पहले समय-आंशिक विचलन समीकरण (टीएफडीई) और समय-आंशिक बर्गर समीकरण (टीएफबीई) का वर्णन मीट्रिक स्टार ग्राफ पर किया और परिणामी समस्याओं के विश्लेषणात्मक/अनुमानित समाधान प्राप्त करने के लिए प्रसिद्ध विविधता पुनरावृत्ति विधि (वीआईएम) का शोषण किया। हालांकि, टीएफबीई का अध्ययन विशेष रूप से मीट्रिक स्टार ग्राफ़ पर गैर-रैखिक भिन्नात्मक अंतर समीकरणों पर विधि की प्रभावशीलता को दर्शाने के लिए किया गया है। संक्षेप में, हमने प्रस्तावित वीआईएम का उपयोग करते हुए रेखीय एफबीवीपी और समय भिन्नात्मक विचलन समीकरण के लिए विश्लेषणात्मक समाधान मीट्रिक स्टार ग्राफ पर प्राप्त किया। मीट्रिक स्टार ग्राफ पर अरेखीय TFBE के लिए, हमने विधि का उपयोग करके अनुमानित समाधान प्राप्त किया और तीन किनारों वाले मीट्रिक स्टार ग्राफ़ पर TFBE के एक विशेष उदाहरण पर विचार करके विधि की दक्षता को सत्यापित किया।

हमने समय-आंशिक विचलन समीकरण द्वारा शासित इष्टतम नियंत्रण समस्याओं का वर्णन वितरित और सीमा नियंत्रण दोनों को स्वीकार करते हुए मीट्रिक स्टार ग्राफ़ पर किया। हमने eigenfunction विस्तार की विधि का उपयोग करके मीट्रिक स्टार ग्राफ़ पर गवर्निंग समीकरणों (TFDEs) के लिए well-posedness परिणामों को साबित किया। इसके अलावा, हमने ऐसी समस्याओं का अनुमानित समाधान खोजने के लिए एक सीमित अंतर योजना प्रस्ताव की। असतत ऊर्जा पद्धति का उपयोग करते हुए, हमने प्रस्तावित अंतर योजना की बिना शर्त स्थिरता को साबित किया और अभिसरण प्राप्त किया। मीट्रिक स्टार ग्राफ़ पर संबंधित इष्टतम नियंत्रण समस्या के लिए, हमने लैग्रेंज गुणक विधि और भागों सूत्र द्वारा भिन्नात्मक एकीकरण का उपयोग करके समतुल्य इष्टतमता प्रणाली प्राप्त की। हमने यह भी साबित किया कि मानी गई इष्टतम नियंत्रण समस्या का एक अद्वितीय इष्टतम समाधान है। इसके अलावा, TFDEs के लिए अंतर योजना के आधार पर, हमने इष्टतम नियंत्रण समस्या का अनुमानित समाधान खोजने के लिए परिणामी इष्टतमता प्रणाली का असतत संस्करण प्राप्त किया। हमने प्रस्तावित योजना की प्रयोज्यता को टीएफडीई और संबंधित इष्टतम नियंत्रण समस्याओं के उदाहरणों को तीन किनारों वाले मीट्रिक स्टार ग्राफ़ पर पर विचार करके प्रदर्शित किया।

मीट्रिक ग्राफ़ के व्यापक वर्ग पर FOCPs की प्रयोज्यता दिखाने के लिए, हमने समय-निर्भर गुणांक के साथ समय आशिंक परवलयिक समीकरण द्वारा संचालित इष्टतम नियंत्रण समस्याओं का वर्णन सामान्य मीट्रिक ग्राफ़ पर किया। गैलेरकिन पद्धति का उपयोग करते हुए, हमने शासी समीकरण (राज्य समीकरण) के weak solution के लिए well-posedness परिणाम प्राप्त किए। इसके अलावा, हमने संबंधित इष्टतम नियंत्रण समस्या के लिए इष्टतम समाधान के अस्तित्व और विशिष्टता को साबित किया और नियंत्रण की विशेषता वाली समतुल्य इष्टतमता प्रणाली प्राप्त की। एक परिमित अंतर विधि पर आधारित अंतर योजना का प्रस्ताव समय-आशिंक परवलयिक समीकरण और संबंधित इष्टतम नियंत्रण समस्याओं के अनुमानित समाधान को सामान्य मीट्रिक ग्राफ़ पर खोजने के लिए किया गया। हम प्रस्तावित अंतर की प्रयोज्यता को TFPE के लिए एक स्टार ग्राफ पर और चक्र (त्रिकोण) से युक्त ग्राफ पर प्रदर्शित करते है। हालांकि, हम असतत इष्टतमता प्रणाली की प्रयोज्यता को विशेष रूप से एक मीट्रिक स्टार ग्राफ के लिए सत्यापित करते हैं ।

अंत में, हमने स्पेस-टाइम फ्रैक्शनल परवलयिक समीकरणों (एसटीएफपीई) द्वारा शासित वितरित इष्टतम नियंत्रण समस्याओं पर विचार किया, जिसमें टाइम-फ्रैक्शनल कैपुटो डेरिवेटिव्स और स्टर्म-लिउविल प्रकार के स्थानिक भिन्नात्मक डेरिवेटिव्स को सिंगल एज (बाउंडेड ओपन इंटरवल) और मेट्रिक पर स्टार ग्राफ शामिल किया गया। सबसे पहले, हमने एक ही किनारे पर राज्य समीकरण के weak solution के लिए well-posedness परिणाम साबित किए। फिर, हमने साबित किया कि एकल किनारे पर एसटीएफपीई से जुड़ी द्विघात वितरित इष्टतम नियंत्रण समस्या एक अद्वितीय समाधान स्वीकार करती है, और संबंधित इष्टतमता प्रणाली को व्युत्पन्न करती है जो नियंत्रण चर की विशेषता है। इसी तरह की जांच एसटीएफपीई और सुविचारित मीट्रिक स्टार ग्राफ पर संबंधित इष्टतम नियंत्रण समस्या के लिए की गई है। इसके अलावा, हम विकसित अंतराल पर और साथ ही एक स्टार ग्राफ पर एसटीएफपीई के अनुमानित समाधान को खोजने के लिए एक अलग योजना विकसित करते हैं । हालांकि, इसी इष्टतम नियंत्रण समस्याओं के लिए, हम एकल किनारे पर अनुमानित समाधान के लिए अंतर योजना विकसित करते है। प्रस्तावित अंतर की प्रयोज्यता और व्यवहार्यता को प्रदर्शित करने के लिए तीन किनारों के साथ इकाई अंतराल और मीट्रिक स्टार ग्राफ पर संख्यात्मक चित्रण प्रस्तुत किए जाते हैं।

Contents

Certificate i

Acknowledgements iii

Abstract v

List of Figures xiii

List of Tables xv

List of Symbols xvii

1 Introduction 1

1.1 Differential equations on metric graphs 8

1.2 Fractional calculus 11

1.3 Fractional differential equations on metric graphs 22

1.4 Fractional optimal control problems 24

1.5 Organization of the thesis 27

2 Existence, uniqueness and Ulam-type stability results for nonlinear FBVPs on a metric star graph and tadpole graph 31

2.1 Linear fractional boundary value problem on a metric star graph and tadpole graph 35

2.2 Existence and uniqueness results for nonlinear FBVP on a metric star graph 40
2.2.1 Existence and uniqueness results via Banach contraction principle 42
2.2.2 Existence results via Schaefer's fixed point theorem 46
2.3 Existence and uniqueness results for nonlinear FBVP on a tadpole graph 53
2.4 Ulam-type stability analysis 64
2.5 Examples 77

3 Fractional optimal control problem on a metric star graph: optimality system and numerical solution 81
3.1 Main results 83
3.1.1 Adjoint system and optimality conditions for FOCPs on a metric star graph 84
3.1.2 Existence and uniqueness of adjoint system 87
3.2 Finite difference approximation for FOCPs 93
3.3 Numerical results 96

4 Variational iteration method for linear and nonlinear fractional differential equations on metric star graph 101
4.1 Variational iteration method (VIM) 103
4.2 Analytic solution for linear fractional differential equations on metric star graph using VIM 104
4.2.1 VIM for a linear FBVP on a metric star graph 104
4.2.2 VIM for time-fractional diffusion equations on a metric star graph 107
4.3 Approximate solution of the time-fractional viscous Burgers equation on a metric star graph 110

5 Optimal control problems driven by time-fractional diffusion equations on metric star graph: optimality system and finite difference approximation 117
5.1 Function spaces 121
5.2 Well-posedness for time-fractional diffusion equations on a metric star graph 124

5.3 Optimal solution and optimality system for the fractional optimal control problem . . . 131
5.4 Finite difference approximation . . . 142
5.4.1 Approximation of the TFDE on a metric star graph . . . 142
5.4.2 Approximation of the FOCP on a metric star graph . . . 150
5.5 Numerical results . . . 151

6 Well-posedness, optimal control and discretization for time-fractional parabolic equations with time-dependent coefficients on metric graphs 159
6.1 Notation and Preliminaries . . . 163
6.1.1 Notation . . . 163
6.1.2 Fractional integrals and derivatives . . . 163
6.1.3 Function spaces for metric graph . . . 165
6.2 Well-posedness for the state equation . . . 166
6.3 Fractional optimal control problem: optimal solution and optimality conditions 177
6.4 Finite difference approximation . . . 186
6.4.1 Approximation of the TFPE on metric graphs . . . 186
6.4.2 Approximation of the FOCP on metric graphs . . . 192
6.5 Numerical results . . . 195

7 Distributed optimal control problems driven by space-time fractional parabolic equations on a metric star graph 201
7.1 Function spaces . . . 206
7.2 Distributed optimal control for a parabolic fractional Sturm-Liouville problem on a single edge . . . 209
7.2.1 Well-posedness results for space-time fractional parabolic equation 209
7.2.2 Fractional optimal control problem . . . 217
7.3 Distributed optimal control for a parabolic fractional Sturm-Liouville problem on a metric star graph . . . 224

7.3.1 Well-posedness results for space-time fractional parabolic equation on a metric star graph . . . 226
7.3.2 Fractional optimal control problem on a metric star graph . . . 229
7.4 Finite difference approximation . . . 234
7.4.1 Approximation of the STFPE on a single edge and a metric star graph . . . 234
7.4.2 Approximation of the FOCP on a single edge . . . 238
7.5 Numerical results . . . 239

8 Conclusion and future directions **245**
8.1 Conclusion . . . 245
8.2 Future directions . . . 248

Bibliography **251**

Bio-Data **271**

List of Figures

1.1 (a) A graph containing cycles; (b) tree-like graph. 2

1.2 A star graph consisting of k edges. 3

2.1 A circular ring with an attached edge 34

3.1 A sketch of the star graph with k edges along with boundary control. . . 83

3.2 Approximation of the state variable y for the optimal control problem defined in Example 3.3.1 for different values of N at $\alpha = 3/2$. 98

3.3 Approximation of the state variable y for the optimal control problem defined in Example 3.3.1 for different fractional order α and $N = 64$. . . 99

3.4 Approximation of the state variable y for the optimal control problem defined in Example 3.3.2 for different values of N at $\alpha = 3/2$. 100

4.1 A star graph $\mathcal{G}'$with one inflow and two outflow reaches. 111

4.2 The analytic solution, (a) $y_1(x,t)$ and (b) $y_2(x,t) = y_3(x,t)$, for Example 4.3.1 in the case of $\alpha = 1$. 114

4.3 (a) Comparison of the approximate solution $y_1^3(x,.1)$ obtained by VIM with the exact solution ($\alpha = 1$); (b) comparison of the approximate solution $y_2^3(x,.1) = y_3^3(x,.1)$ obtained by VIM with the exact solution ($\alpha = 1$). . . 114

4.4 Approximate solution $y_1^3(x,t)$ for $\alpha = .7, .9$. 116

4.5 Approximate solution $y_2^3(x,t) = y_3^3(x,t)$ for $\alpha = .7, .9$. 116

5.1 A star graph with k edges along with distributed and boundary controls 118

5.2 Example 5.5.1. (a) Approximate solution Y at $t = 0.5$ on a metric star graph with three edges (b) comparison of exact solution and numerical solution at $t = 1$ on a single edge e_1; for $\alpha = 0.5$, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = .02$ and $\Delta t = .01$. 154

5.3 Example 5.5.2. (a) Approximate solution Y at $t = 0.5$ on a metric star graph with three edges (b) comparison of exact solution and numerical solution at $t = 1$ on a single edge e_1; for $\alpha = 0.5$, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = .02$ and $\Delta t = .01$. 155

5.4 Example 5.5.3. (a) Approximate solution of the control variable U at $t = 0.5$ on a metric star graph with three edges (b) comparison of exact solution and numerical solution of the control variable at $t = 0.5$ on a single edge e_1; for $\alpha = 0.5$, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = .0156$ and $\Delta t = .0156$. . 157

6.1 A graph containing cycle 191

6.2 Example 6.5.1. (a) Analytic solution $y(x, .5) = (y_i(x, .5))_{i=1}^3$ for $\alpha = 0.5$ on a metric star graph with three edges; (b) Approximate solution Y at $t = 0.5$ on a metric star graph with three edges for $\alpha = 0.5$, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = .0156$ and $\Delta t = .01$. 197

6.3 Example 6.5.2. (a) Analytic solution $y(x, .5) = (y_3(x, .5), y_4(x, 0.5))$ for $\alpha = 0.5$; (b) Approximate solution Y at $t = 0.5$ on the edges e_3 and e_4 for $\alpha = 0.5$, $\Delta x_i = .0156$, $i = 1, 2, \ldots, 6$ and $\Delta t = .01$. 197

7.1 Approximate solution of state variable y (left side) and control variable u (right side) for different values of M for the optimal control problem defined in the Example 7.5.2 at $t = 0.4$ with $\Delta t = 0.02$, $\alpha = 0.5$ and $\beta = 0.5$. 242

List of Tables

3.1 Control variable $u = (u_1, u_2, u_3)$ for different values of N for Example 3.3.1. 97

3.2 Control variable $u = (u_1, u_2, u_3)$ for different fractional order α with $N = 64$ for Example 3.3.1. 100

4.1 Comparison of pointwise absolute errors for the first three iterations at $\alpha = 1$. 115

4.2 Comparison of pointwise absolute errors for the third iteration at different time t and $\alpha = 1$. 115

5.1 The spatial error and convergence rates of difference scheme (5.76)-(5.80) for Example 5.5.1 for $\alpha = 0.1$, $N = 100$ and $k = 3$. 154

5.2 The spatial error and convergence rates of difference scheme (5.76)-(5.80) for Example 5.5.2 for $\alpha = 0.1$, $N = 100$ and $k = 3$. 155

5.3 The maximum absolute error for the state and the control varibale of the optimal control problem defined in Example 5.5.3 for $\alpha = 0.5$ and $k = 3$. 157

6.1 The spatial error for Example 6.5.1 for $\alpha = 0.5$, $N = 1000$ and $k = 3$. . . 196

6.2 The spatial error for Example 6.5.2 for $\alpha = 0.5$ and $N = 100$. 198

6.3 The maximum absolute error for the state and the control varibale of the optimal control problem defined in Example 6.5.3 for $\alpha = 0.5$ and $k = 3$. 199

7.1 The maximum absolute error for Example 7.5.1 for different values of α. 240

7.2 The maximum spatial error for Example 7.5.2 at $t = 0.5$ for $\alpha = 0.5$ and $\beta = 1$. 241

7.3 The spatial error for Example 7.5.3 for different values of α at $t = 1$. . . . 243

List of Symbols

Symbol	Meaning
$\mathcal{G}$	Metric graph
e_i	ith edge of the metric graph
$\mathbb{N}$	Set of natural numbers
$\mathbb{R}$	Set of real numbers
$A \subseteq X$	A is a subset of X
$A \cap B$	The intersection of A and B
$A \cup B$	The union of A and B
$C[a,b]$	Banach space of all continuous functions with the norm $\|f\| = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|$
$C^n[a,b]$	Space of all functions having n times continuously differentiable on $[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$
$AC[a,b]$	Space of functions that are absolutely continuous on $[a,b]$
$AC^n[a,b]$	Space of functions f such that $f \in C^{n-1}([a,b])$ and $f^{(n-1)} \in AC([a,b])$
$\|f\|_{L^p(a,b)}$	$\left(\int_a^b \|f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$, norm of f in $L^p(a,b)$
$\|f\|_{L^\infty(a,b)}$	$\operatorname{ess\,sup}_{t\in(a,b)} \|f(t)\|$, norm of f in $L^\infty(a,b)$
$C_c^\infty(a,b)$	Set of infinitely differentiable functions with compact support in (a,b)
$f * g$	Convolution of f and g