SIGNAL RECONSTRUCTION FROM MULTIRATE OBSERVATIONS

SANDEEP PATEL

2017BSZ8041

BHARTI SCHOOL OF TELECOMMUNICATION TECHNOLOGY AND MANAGEMENT

INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI

MAY 2022

©Indian Institute of Technology Delhi (IITD), New Delhi, 2022

SIGNAL RECONSTRUCTION FROM MULTIRATE OBSERVATIONS

by

SANDEEP PATEL

2017BSZ8041

Bharti School of Telecommunication

Technology and Management

Submitted

in fulfillment of the requirements of the degree of

Doctor of Philosophy

to the

INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI

MAY 2022

Certificate

This is to certify that the thesis titled "**Signal Reconstruction From Multirate Observations**" being submitted by **Mr.Sandeep Patel** with entry number **2017BSZ8041** to Bharti School of Telecommunication Technology and Management, Indian Institute of Technology Delhi, for the award of the degree of **Doctor of Philosophy**, is a record of bona-fide research work carried out by him under our supervision. In our opinion, the thesis has reached the standards fulfilling the requirements of the regulations relating to the degree.

The results contained in this thesis have not been submitted either in part or in full to any other university or institute for the award of any other degree or diploma.

Dr. Brejesh Lall
Professor
Department of Electrical Engineering
Indian Institute of Technology Delhi,
New Delhi - 110016

Dr. Ravindra Dhuli
Professor
School of Electronics Engineering
VIT-AP University, Andhra Pradesh - 522237

"Teachers open the door but you must walk through it yourself."

Chinese Proverb

Acknowledgements

Foremost, I like to sincerely thank my supervisor, Prof. Brejesh Lall, for selecting me as his student. This Ph.D. would not have been possible without his support. I learned a lot from his courses, and he assisted in several ways in matters related to Ph.D. His vast experience helped me in better shaping the papers before submission. I am thankful to him for feedback and corrections in draft papers, reports, etc., and making them presentable. I am equally grateful to my co-supervisor, Prof. Ravindra Dhuli. He has given much time to look at my derivations, experiments and editing papers, presentations and reports. I am also thankful to Prof. S. D. Joshi for being my SRC chairman. His courses were of immense help during the work. He not only teaches well but also instills motivation to seek further learning. I took help from him on many occasions for various queries related to my work.

I am truly indebted to my wife, Maya, for completing this milestone in life. She stood with me during this time like a pillar and looked after the household while I was busy in the study. She constantly pushed me for the timely completion of the degree. I am also thankful to my daughter, Cheshta. She brought a smile to my face with her acts whenever I was tense. Unfortunately, on many occasions, she had to sacrifice her playtime with me due to my study. I feel sorry for that.

I am thankful to research scholar Ayan Kumar Dutta for helping me in submitting progress reports and other academic matters. I am fortunate to have friends and seniors like Shital, Tojum, Prakash, Manoj, Onkar, Rajesh, etc., for all the good times I had in Delhi. Prakash, being my boss at that time, allowed me time to study during coursework. I am grateful to Sh. Anil Kumar, former Director, WMO, for granting me permission for Ph.D. Finally, I owe my success and achievements to God, as without his will, nothing moves in the world.

Abstract

Advances in sensor technologies are enabling us to observe a phenomenon of interest using several low-cost, compact, energy-efficient sensors. The low-resolution observations from these sensors are then utilized to reconstruct the phenomenon at high resolution. This reconstruction problem is challenging and the aim is to obtain the phenomenon as accurately as possible with low implementation cost. In this work, we address this problem to better reconstruct a signal from multirate observations resulting in several significant contributions. We model the observations as the output of an analysis bank and carry out time-domain analysis to design an optimal FIR synthesis bank. We pose this as minimizing the mean-square problem and prove that at least one optimal solution is always possible. A parametric form for all optimal solutions is obtained for a non-maximally decimated filter bank. The necessary and sufficient conditions for an optimal solution that results in perfect reconstruction (PR) are derived as time-domain pseudocirculant conditions. This derivation is a novel theoretical contribution to the multirate filter bank theory. We explore PR in a more general setting which results in the ability to design a synthesis bank with a particular delay in the reconstruction. Using this delay, one can achieve PR in cases where it might not have been possible otherwise. Further, we extend the design and analysis to observations having noise and non-uniform rates.

We next develop a recursive formulation for the reconstruction of a signal from multirate observations. For that, we derive a new expression for the computation of a synthesis filter bank for a given length. One can use the expression to obtain a solution either directly or recursively from any smaller length solution, not necessarily the solution corresponding to the previous length. Further, recursion can be performed with arbitrary step size. The recursive formulation helps in studying the properties of the solutions with variation in filter length. We derive the incremental change in the mean-square error (MSE) with a unit increase in the filter length. The case with zero MSE, resulting in PR, is also studied in the recursive framework. A variant of the time-domain PR condition is derived to obtain recursive PR solutions with respect to filter length. The uniqueness of PR solutions with changes in filter length is also studied. Experimental results are presented to justify the advantage of recursive solutions developed.

We next carry out optimization of delay to reduce error in reconstructing a signal from multirate observations. The desired signal in our framework is modeled as a delayed version of the input signal because a suitable choice of delay can achieve better reconstruction error. For that, we analyze the effect of change in delay on reconstruction error and synthesis bank solutions. Using this analysis, we develop an optimization procedure leading to reduction in computation cost by a factor of decimation rate. We derive an upper limit on optimum delay value, effectively reducing the search space for optimization. Further, we present a result about the effect of change in filter length on delay range under PR.

Lastly, we attempt an adaptive reconstruction of a signal from multirate subband components. For that, we begin our analysis with the steepest-descent algorithm. We highlight few unique characteristics of the algorithm when applied to the matrix adaptive filter. For a given analysis filter bank, an infinite number of optimum synthesis bank solutions are possible. We like to know the solution to which the steepest-descent method will converge out of these infinite solutions. We theoretically answer this and obtain the steady-state solution for an arbitrary initial weight value. We then analyze the least-mean-square (LMS) algorithm and find that three update mechanisms are possible under the algorithm. We experimentally test these update equations to compare their computational efficiency. For the normalized LMS (NLMS) algorithm, we experimentally determine a better scheme for normalization of the step-size. As the LMS/NLMS algorithm has slow convergence, we explore alternative algorithms having good convergence. Finally, experimental results are presented to show the utility of our work.

सार

सेंसर प्रौद्योगिकियों में प्रगति हमें कई कम लागत वाले, कॉम्पैक्ट, ऊर्जा कुशल सेंसर का उपयोग करके रुचि की घटना का अवलोकन करने में सक्षम बनाती है। इन सेंसरों से कम-रिज़ॉल्यूशन अवलोकनों का उपयोग उच्च रिज़ॉल्यूशन पर घटना के पुनर्निर्माण के लिए किया जाता है। यह पुनर्निर्माण समस्या चुनौतीपूर्ण है और इसका उद्देश्य कम कार्यान्वयन लागत के साथ यथासंभव सटीक रूप से घटना को प्राप्त करना है। इस काम में, हम इस समस्या का समाधान मल्टीरेट अवलोकनों से सिग्नल को बेहतर ढंग से पुनर्निर्माण करने के लिए करते हैं जिसके परिणामस्वरूप कई महत्वपूर्ण योगदान होते हैं। हम अवलोकनों को एक विश्लेषण बैंक के आउटपुट के रूप में मॉडल करते हैं और एक इष्टतम एफआईआर संश्लेषण बैंक डिजाइन करने के लिए टाइम-डोमेन विश्लेषण करते हैं। हम इसे माध्य-वर्ग त्रुटि को न्यूनतम करने के रूप में प्रस्तुत करते हैं और साबित करते हैं कि कम से कम एक इष्टतम समाधान हमेशा संभव होता है। सभी इष्टतम समाधानों के लिए एक पैरामीट्रिक फॉर्म एक नान-मेक्सिमली विघटित फ़िल्टर बैंक के लिए प्राप्त किया है। एक इष्टतम समाधान के लिए आवश्यक और पर्याप्त शर्तें, जिसके परिणामस्वरूप पूर्ण पुनर्निर्माण (पीआर) होता है, हमने टाइम-डोमेन स्यूडोसर्कुलेंट स्थितियों के रूप में प्राप्त की हैं। यह व्युत्पत्ति मल्टीरेट फिल्टर बैंक सिद्धांत के लिए एक नया सैद्धांतिक योगदान है। हम एक अधिक सामान्य सेटिंग में पीआर का पता लगाते हैं जिसके परिणामस्वरूप पुनर्निर्माण में एक विशेष देरी के साथ एक संश्लेषण बैंक को डिजाइन करने की क्षमता होती है। इस देरी का उपयोग करके, उन मामलों में पीआर हासिल किया जा सकता है जहां यह अन्यथा संभव नहीं होता। इसके अलावा, हम शोर और गैर-समान दरों वाले अवलोकनों के लिए डिजाइन और विश्लेषण का विस्तार करते हैं।

हम इसके आगे मल्टीरेट अवलोकनों से सिग्नल के पुनर्निर्माण के लिए एक पुनरावर्ती फॉर्मूलेशन विकसित करते हैं। उसके लिए, हम एक दी गई लंबाई के लिए एक संश्लेषण फिल्टर बैंक की गणना के लिए एक नई अभिव्यक्ति प्राप्त करते हैं। किसी भी छोटी लंबाई के समाधान से सीधे या पुनरावर्ती रूप से समाधान प्राप्त करने के लिए अभिव्यक्ति का उपयोग कर सकते हैं, जरूरी नहीं कि पिछली लंबाई के अनुरूप समाधान का ही उपयोग करना पड़े। इसके अलावा, रिकर्सन मनमाने ढंग से स्टेप साइज के साथ किया जा सकता है। पुनरावर्ती सूत्रीकरण फिल्टर लंबाई में भिन्नता के साथ समाधानों के गुणों का अध्ययन करने में मदद करता है। हम फ़िल्टर लंबाई में एक इकाई वृद्धि के साथ माध्य-वर्ग त्रुटि (एमएसई) में वृद्धिशील परिवर्तन प्राप्त करते हैं। शून्य एमएसई के मामले, जिसके परिणामस्वरूप पीआर होता है, का भी पुनरावर्ती ढांचे में अध्ययन किया जाता है। फ़िल्टर लंबाई के संबंध में पुनरावर्ती पीआर समाधान प्राप्त करने के लिए टाइम-डोमेन पीआर शर्त का एक प्रकार प्राप्त किया गया है। फिल्टर लंबाई में परिवर्तन के साथ पीआर समाधानों की विशिष्टता का भी अध्ययन किया गया है। विकसित पुनरावर्ती समाधानों के लाभ को सही ठहराने के लिए प्रायोगिक परिणाम प्रस्तुत किए गए हैं।

हम आगे मल्टीरेट अवलोकनों से सिग्नल के पुनर्निर्माण में त्रुटि को कम करने के लिए देरी का अनुकूलन करते हैं। हमारे ढांचे में वांछित सिग्नल को इनपुट सिग्नल के विलंबित संस्करण के रूप में मॉडल किया गया है क्योंकि देरी का एक उपयुक्त विकल्प बेहतर पुनर्निर्माण त्रुटि प्राप्त कर सकता है। उसके लिए, हम पुनर्निर्माण त्रुटि और संश्लेषण बैंक समाधानों पर विलंब में परिवर्तन के प्रभाव का विश्लेषण करते हैं। इस विश्लेषण का उपयोग करते हुए, हम एक अनुकूलन प्रक्रिया विकसित करते हैं जिससे गणना लागत में डेसिमेशन दर के कारक द्वारा कमी आती है। हम इष्टतम विलंब मान पर एक ऊपरी सीमा प्राप्त करते हैं, जिससे अनुकूलन के लिए खोज स्थान को प्रभावी ढंग से कम किया

जा सकता है। इसके अलावा, हम पीआर के तहत देरी सीमा पर फिल्टर की लंबाई में बदलाव के प्रभाव के बारे में एक परिणाम प्रस्तुत करते हैं।

अंत में, हम मल्टीरेट सबबैंड घटकों से सिग्नल के अडाप्टिव पुनर्निर्माण का प्रयास करते हैं। उसके लिए, हम अपने विश्लेषण की शुरुआत स्टीपेस्ट-डिसेंट एल्गोरिथम के साथ करते हैं। मैट्रिक्स अडाप्टिव फ़िल्टर पर लागू होने पर हम एल्गोरिदम की कुछ अनूठी विशेषताओं को हाइलाइट करते हैं। किसी दिए गए विश्लेषण फ़िल्टर बैंक के लिए, अनंत संख्या में इष्टतम संश्लेषण बैंक समाधान संभव हैं। हम अनंत समाधानों में से उस समाधान को जानना चाहते हैं जिसको स्टीपेस्ट-डिसेंट विधि अभिसरण करेगी। हम सैद्धांतिक रूप से इसका उत्तर देते हैं और एक मनमाना प्रारंभिक वजन मान के लिए स्थिर-अवस्था समाधान प्राप्त करते हैं। फिर हम लिस्ट-मीन-स्कवेर (एलएमएस) एल्गोरिदम का विश्लेषण करते हैं और पाते हैं कि एल्गोरिदम के तहत तीन अद्यतन तंत्र संभव हैं। हम इन अद्यतन समीकरणों की कम्प्यूटेशनल दक्षता की तुलना करने के लिए प्रयोगात्मक रूप से परीक्षण करते हैं। सामान्यीकृत एलएमएस (एनएलएमएस) एल्गोरिदम के लिए, हम प्रयोगात्मक रूप से स्टेप साइज के सामान्यीकरण के लिए एक बेहतर योजना निर्धारित करते हैं। चूंकि एलएमएस/एनएलएमएस एल्गोरिथम में धीमी अभिसरण होती है, इसलिए हम अच्छे अभिसरण वाले वैकल्पिक एल्गोरिदम का पता लगाते हैं। अंत में, हमारे काम की उपयोगिता दिखाने के लिए प्रयोगात्मक परिणाम प्रस्तुत किए गए हैं।

Contents

Certificate i

Acknowledgements v

Abstract vii

Contents xi

List of Figures xv

List of Tables xvii

List of Abbreviations xix

List of Symbols xxi

1 Introduction 1

1.1 Motivation 4

1.2 Previous Work 6

1.3 Overview and Contributions 8

1.4 Thesis Outline 10

2 Preliminaries 13

2.1 Matrix Representations 13

2.1.1 Observation Vector 13

2.1.2 Decimation 14

2.1.3 Expansion 15

2.1.4 Convolution 16

2.2 System of Linear Equations 18

2.2.1 Generalized Inverse 18

2.2.2 Solutions 19

2.3 Pseudoinverse . . . 20
2.3.1 Pseudoinverse Identities . . . 20
2.3.2 Product of Matrices . . . 21
2.3.3 Pseudoinverse of Block Matrix . . . 21

3 Optimum Synthesis Filter for Reconstruction **25**
3.1 Design Framework . . . 25
3.1.1 Wiener Filtering Framework . . . 27
3.2 Design of Matrix Synthesis Filter . . . 27
3.2.1 Wiener-Hopf Equations . . . 28
3.2.2 Wiener Solutions . . . 29
3.2.3 Consistency of Wiener-Hopf Equations . . . 31
3.2.4 Computational Complexity . . . 35
3.2.5 Minimum MSE . . . 35
3.2.6 Geometric Interpretation . . . 36
3.3 Perfect Reconstruction . . . 38
3.3.1 Extension of Polyphase Identity . . . 38
3.3.2 Time-Domain Pseudocirculant Property . . . 41
3.3.3 Parametric Form for Solutions . . . 45
3.3.4 Conditions on Analysis Bank and Delay . . . 45
3.3.5 Geometric Interpretation . . . 49
3.3.6 Relation with General Solutions . . . 51
3.4 Reconstruction in Presence of Noise . . . 55
3.4.1 Modeling of Noise . . . 55
3.4.2 Conditions for Wiener Solutions . . . 56
3.4.3 Wiener Solution . . . 57
3.5 Extension to NUFB . . . 61
3.6 Experimental Results . . . 64
3.6.1 Experiment 1 . . . 65
3.6.2 Experiment 2 . . . 66
3.6.3 Experiment 3 . . . 68
3.7 Conclusion . . . 69

4 Recursive Approach for Reconstruction **71**
4.1 Recursive Solutions for Synthesis Filter Bank . . . 71

4.1.1 Wiener-Hopf Equations . . . 72
4.1.2 Wiener Solution . . . 74
4.1.3 Direct Evaluation of Synthesis Bank Solution . . . 77
4.1.4 Algorithm for Evaluating Recursive Solution . . . 79
4.2 Recursive MSE . . . 80
4.3 Perfect Reconstruction Case . . . 82
4.3.1 PR Conditions . . . 82
4.3.2 Recursive PR Solution . . . 84
4.3.3 Properties of Solutions . . . 86
4.4 Presence of Noise . . . 88
4.4.1 Special Case . . . 90
4.4.2 Extension to NUFB . . . 90
4.5 Experimental Results . . . 90
4.5.1 Experiment 1 . . . 90
4.5.2 Experiment 2 . . . 92
4.5.3 Experiment 3 . . . 92
4.6 Conclusion . . . 94

5 Optimization of Delay in Reconstruction **95**
5.1 Effect of Delay on the Reconstruction Error . . . 95
5.1.1 Increase in Delay . . . 96
5.1.2 Decrease in Delay . . . 97
5.1.3 Nature of Relation . . . 98
5.2 Optimum Delay Range . . . 99
5.3 Optimization Procedure . . . 102
5.3.1 NUFB . . . 102
5.4 Experimental Results . . . 102
5.4.1 Experiment 1 . . . 103
5.4.2 Experiment 2 . . . 104
5.4.3 Experiment 3 . . . 105
5.5 Conclusion . . . 105

6 Adaptive Reconstruction from Observations **107**
6.1 Adaptive Reconstruction . . . 107
6.2 Steepest-Descent Method . . . 108

6.2.1 Stability Analysis . . . 109
6.2.2 Steady-State Solution . . . 111
6.3 LMS Algorithm . . . 113
6.3.1 Mean Convergence . . . 114
6.3.2 Update Equation . . . 114
6.3.3 Performance . . . 116
6.4 NLMS Algorithm . . . 118
6.4.1 Experiment . . . 118
6.4.2 Revised Update Equation . . . 119
6.4.3 Slow Convergence . . . 120
6.5 RLS Algorithm . . . 120
6.5.1 Instability of RLS Algorithm . . . 120
6.5.2 Inverse QR-RLS Algorithm . . . 122
6.6 Extension for Noise and NUFB . . . 123
6.6.1 Experiment . . . 124
6.7 Conclusion . . . 125

7 Conclusion and Future Work **127**
7.1 Future Work . . . 129

A Pseudoinverse of PSD Block Matrix **131**

B Pseudoinverse of Lower Triangular Block Matrix **133**
B.1 Proof of Theorem 7 . . . 133
B.1.1 Proof of 7(i) . . . 133
B.1.2 Proof of 7(ii) . . . 134
B.1.3 Proof of 7(iii) . . . 135
B.2 Product of Pseudoinverse and Matrix . . . 136
B.3 Product of Matrix and Pseudoinverse . . . 137

Bibliography **139**

Publications **153**

Bio-data of Author **155**

List of Figures

2.1 Decimation preceded by time-advance 14

3.1 Design framework for signal reconstruction from multirate observations 26
3.2 MIMO Wiener filtering framework 27
3.3 The polyphase identity 39
3.4 Extension of the polyphase identity 39
3.5 Design framework for signal reconstruction from noisy observations . 55
3.6 Blocking of a subband under NUFB to UFB conversion 62
3.7 Equivalent representation of the blocking of a subband 62
3.8 Equivalent UFB channels of a single NUFB channel 63
3.9 Path of a new subband signal after blocking 63
3.10 Equivalent path of a new subband signal after blocking 64
3.11 Ensemble averaged square error for various delay values 65
3.12 MSE vs. noise variance 67
3.13 Error vs. time curve 68

4.1 Execution time (in ms) in the computation of a solution for the modified length 91
4.2 Execution time (in ms) in the computation of a solution 93
4.3 MSE vs. delay for various filter lengths 93

5.1 Desired response with unit increase in delay 96
5.2 Desired response with unit decrease in delay 98
5.3 Variation of MSE with delay 99
5.4 Optimum delay value for various filter lengths. 103
5.5 Average execution time for various filter lengths. 104
5.6 MSE vs. delay for various filter lengths. 104

6.1 Comparison of execution time for three update equations 116

6.2 NLMS algorithm behaviour with update equation I 119
6.3 NLMS algorithm behavior with update equation II 119
6.4 An instability behavior of the RLS algorithm 121
6.5 Convergence behavior of the inverse QR-RLS algorithm 123
6.6 Noisy observations having non-uniform rates 124
6.7 Adaptive reconstruction of output in the presence of noise 125

List of Tables

3.1 MSE for various delay values 66
3.2 Variation in MSE with number of available subbands 66

List of Abbreviations

AR	Autoregressive
ELT	Extended Lapped Transform
LCM	Least Common Multiple
LHS	Left-Hand Side
LMS	Least-Mean-Square
LPTV	Linear Periodically Time-Varying
LTI	Linear Time-Invariant
MIMO	Multiple Input Multiple Output
MISO	Multiple Input Single Output
MSE	Mean-Square Error
NLMS	Normalized Least-Mean-Square
NUFB	Non-Uniform Filter Bank
OFB	Oversampled Filter Bank
PR	Perfect Reconstruction
PSD	Positive Semi-Definite
QMF	Quadrature Mirror Filter
RHS	Right-Hand Side
RLS	Recursive Least-Squares
SVD	Singular Value Decomposition
UFB	Uniform Filter Bank
WSS	Wide-Sense Stationary

List of Symbols

b or B	Plain lowercase or uppercase is a scalar quantity.
$\mathbf{b}$	Bold lowercase is a vector variable.
$\mathbf{B}$	Bold uppercase is a matrix quantity.
$\mathbf{0}$ and $\mathbf{I}$	Zero and identity matrices, respectively, with implicit sizes.
$(.)^*$, $(.)^T$ and $(.)^H$	Conjugate, transpose and conjugate transpose operator, respectively.
$(.)^\dagger$	Pseudoinverse operator.
$\mathbf{E}[.]$	Expectation operator.

Dedicated to

Maya

&

Cheshta…