

# DYNAMICS OF ENVELOPING SEMIGROUPS

MANPREET SINGH



DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI  
FEBRUARY 2022

©Indian Institute of Technology Delhi (IITD), New Delhi, 2022

# DYNAMICS OF ENVELOPING SEMIGROUPS

by

Manpreet Singh

Department of Mathematics

*Submitted*

*in fulfillment of the requirements of the degree of Doctor of Philosophy*

to the



INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI

FEBRUARY 2022

**Dedicated**  
to  
*The feeling of hope*

# Certificate

I am satisfied that the thesis entitled *Dynamics of Enveloping Semigroups* presented by **Mr. Manpreet Singh** (2015MAZ8145) is worthy of consideration for the award of the degree of **Doctor of philosophy** and is a record of the original bonafide research work carried out by him under my guidance and supervision and the results contained in it have not been submitted in part or full to any other university or institute for award of any degree/ diploma.

**Prof. Anima Nagar**

Department of Mathematics

Indian Institute of Technology Delhi

# Acknowledgments

I would like to express my sincere gratitude to my supervisor, Prof. Anima Nagar, for her supervision and research guidance. Her expert guidance, valuable suggestions and moral support helped me to understand the subject and do my research work. Without her generous guidance, this dissertation would not have taken the present form.

I am thankful to my SRC members: Prof. Niladri Chatterjee, Dr. Amit Priyadarshi, and Prof. Sudipto Mukherjee from IIT Delhi and Prof. Riddhi Shah from JNU, Delhi for their time and encouraging comments to improve this thesis. I am thankful to IIT Delhi authorities, hostel staff, administration for providing me the necessary facilities for smooth completion of my work. I am thankful to Prof. Joseph Auslander, Prof. Ethan Akin, Prof. Eli Glasner and Prof. Yonatan Gutman for their valuable discussions and suggestions. I am also thankful to all expert referees and editors of Journals for evaluating my research papers. Also I would like to thank CSIR for providing me financial assistance by awarding me a research fellowship throughout my Ph.D research work.

I am forever indebted to my entire family for their encouragement, support and belief in me. Thanks to all the members of PG Dramatic society and PG music society (Udbhav) of IIT for giving me an opportunity to become their part and sharing beautiful memories on stage and off stage. Love to all of my friends who was the part of my life during this journey. Their love, their emotional and moral support and the memories we lived together will always be with me.

Manpreet Singh

# Abstract

A flow is a pair  $(X, T)$ , where  $X$  is a compact metric space or a compact Hausdorff topological space and  $T$  is a discrete topological group acting on  $X$  with a group action. Enveloping Semigroup  $E(X, T)$  or  $E(X)$  of  $(X, T)$ , first introduced by Robert Ellis in 1960, is defined as  $\overline{\{t : X \rightarrow X : t \in T\}} \subseteq X^X$ , where each  $t \in T$  gives a map from  $X$  to itself.  $E(X, T)$  is a semigroup and have the product topology inherited from  $X^X$ .  $E(X)$  is also a compact Hausdorff topological space. So,  $(E(X), T)$  is a flow too. The induced space  $2^X$ , the space of all non-empty closed subsets of  $X$ , with the induced action of  $T$ ,  $(2^X, T)$  is also a flow where  $2^X$  is compact metric space or compact Hausdorff topological space with the Hausdorff metric or *Vietories Topology* respectively.

In this thesis, we work on some inter-relations in the dynamical properties of a flow and its induced flow. We compute enveloping semigroups of some flows. We work on recurrence in enveloping semigroup and periodic points of enveloping semigroups. We are getting results about the proximal relation on members of enveloping semigroup.

We study the topological dynamics of a flow and its induced space via enveloping semigroups. We study the inducibility of the members of  $E(2^X, T)$  under some conditions on  $(X, T)$  and the relation between the enveloping semigroups of both flows. We found that for an equicontinuous flow  $(X, T)$ , every member of  $E(2^X, T)$  is inducible, also  $E(X, T)$  and  $E(2^X, T)$  are conjugate flows. For a WAP flow, the flow homomorphism from  $E(2^X, T)$  to  $E(X, T)$  is injective.

By using the theory of enveloping semigroups of a flow, we work on the almost periodic points of the induced space which connects to the study of quasifactors of a flow. We study the rigidity properties of a flow, weakly rigidity, rigidity and

uniform rigidity.

We also introduce the new notions namely *Saturated Enveloping semigroup*, *Super Saturated Enveloping semigroup* and the new classes of rigidity, *strongly rigid flows*. Strongly rigid flows lie between equicontinuous flows and distal flows and this property is preserved under factors and finite products.

# सार

एक प्रवाह एक जोड़ी  $(X, T)$  है, जहां  $X$  एक सुगठित मापीय स्थान या सुगठित हॉसडॉर्फ संस्थानिक स्थान है और  $T$  एक समूह कार्य के माध्यम से एक्स पर अभिनय करने वाला एक अनिरंतर संस्थानिक समूह है।  $(X, T)$  का घेर अर्धसमूह  $E(X, T)$  या  $E(X)$ , पहली बार 1960 में रॉबर्ट एलिस द्वारा  $\overline{\{t: X \rightarrow X : t \in T\}} \subseteq X^X$  के रूप में परिभाषित किया गया, जहां प्रत्येक  $t \in T$ ,  $X$  से  $X$  एक फलन देता है।  $E(X, T)$  उत्पाद सांस्थिति  $X^X$  से विरासत में मिला एक अर्धसमूह है।  $E(X)$  भी एक सुगठित हॉसडॉर्फ संस्थानिक स्थान है। इसलिए,  $(E(X, T))$  भी एक प्रवाह है। प्रेरित स्थान  $2^X$ , जो कि  $X$  के सभी गैर-रिक्त बंद उप-समुच्चय का स्थान है,  $T$  की प्रेरित क्रिया के साथ,  $(2^X, T)$  भी एक प्रवाह है जहाँ  $2^X$  क्रमशः हॉसडॉर्फ मापीय के साथ सुगठित मापीय स्थान, या विएट्रीज़ सांस्थिति सुगठित के साथ हॉसडॉर्फ स्थान है।

इस शोध प्रबंध में, हम एक प्रवाह और उसके प्रेरित प्रवाह के गतिशील गुणों में कुछ अंतर-संबंधों पर काम करते हैं। हम कुछ प्रवाहों के घेर अर्धसमूहों की गणना करते हैं। हम घेर अर्धसमूह में पुनरावृत्ति और आवर्त बिंदुओं पर कार्य करते हैं। हमें घेर अर्धसमूह के सदस्यों पर समीपस्थ संबंध के बारे में परिणाम मिल रहे हैं।

हम घेर अर्धसमूह के माध्यम से एक प्रवाह और उसके प्रेरित स्थान के संस्थानिक गतिविज्ञान का अध्ययन करते हैं। हम  $(X, T)$  पर कुछ शर्तों के अधीन  $E(2^X, T)$  के सदस्यों की प्रेरकता का अध्ययन करते हैं और दोनों प्रवाहों के घेर अर्धसमूहों के बीच के संबंध का अध्ययन करते हैं। हमने पाया कि एक सम-सतत प्रवाह  $(X, T)$  के लिए,  $E(2^X, T)$  का प्रत्येक सदस्य प्रेरित है,  $E(X, T)$  और  $E(2^X, T)$  भी संयुग्मी प्रवाह हैं जहाँ। WAP (कमजोर रूप से लगभग आवधिक) प्रवाह के लिए,  $E(2^X, T)$  से  $E(X, T)$  प्रवाह समरूपता एक से एक फलन है।

प्रवाह के घेर अर्धसमूहों के सिद्धांत का उपयोग करके, हम प्रेरित स्थान के लगभग-आवर्त बिंदुओं पर काम करते हैं जो प्रवाह के क्वासिफैक्टर्स के अध्ययन से जुड़ते हैं। हम एक प्रवाह के दृढ़ गुणों- कमजोर दृढ़ता, दृढ़ता और एक-रूप दृढ़ता का अध्ययन करते हैं।

हम नई धारणाओं का भी परिचय देते हैं, अर्थात् संतृप्त घेर अर्धसमूह, उत्तम संतृप्त घेर अर्धसमूह और दृढ़ता के नए वर्ग, बलपूर्वक दृढ़ प्रवाह। बलपूर्वक दृढ़ प्रवाह सम-सतत प्रवाह और दूरस्थ प्रवाह के बीच होते हैं और यह संपत्ति कारकों और परिमित उत्पादों के तहत संरक्षित है।

# Contents

<b>Certificate</b>	<b>i</b>
<b>Acknowledgments</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>1 INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
1.1 Basic Definitions . . . . .	2
1.2 Literature Survey and Motivation . . . . .	4
1.3 Chapter's Overview . . . . .	12
<b>2 DYNAMICS ON INDUCED SPACES</b>	<b>15</b>
2.1 Main Results . . . . .	18
<b>3 ENVELOPING SEMIGROUP</b>	<b>25</b>
3.1 Recurrence in Enveloping Semigroups . . . . .	29
3.2 Periodic points for Enveloping Semigroups . . . . .	30
3.3 Finite Minimal Ideals in Enveloping Semigroup and Proximal Relations . . . . .	34
3.4 Enveloping Semigroup of Semiflows . . . . .	40
<b>4 ENVELOPING SEMIGROUP OF INDUCED SYSTEMS</b>	<b>45</b>
4.1 Inducible Mappings and Enveloping Semigroup . . . . .	45
4.2 Saturated Enveloping Semigroups . . . . .	54
<b>5 STRONGLY RIGID FLOWS</b>	<b>57</b>
5.1 Some Dynamical Properties . . . . .	60
5.2 Semiflows . . . . .	66
<b>Appendices</b>	
<b>Appendix A Stone Čech Compactification</b>	<b>71</b>
A.1 Circle Operator . . . . .	73
<b>Appendix B Enveloping Semigroups <math>E(X)</math> for flows <math>(X, T)</math></b>	<b>75</b>
B.1 Ideals in $E(X)$ . . . . .	76
B.2 Minimality and Enveloping Semigroups . . . . .	78
<b>Bibliography</b>	<b>80</b>
<b>Bio-Data</b>	<b>84</b>